C-2 Folgen und ihre Grenzwerte

Definition C.35 (Folge)

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \in \mathbb{R}, n \in f(n) =: a_n$ heißt *(reellwertige) Folge*. Wir nennen a_n das *n-te Glied* der Folge und kürzen die Folge mit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}$ oder einfach a_n ab.

Bemerkung:

Viele der nachfolgenden Resultate (aber nicht alle) lassen sich verallgemeinern auf Folgen mit anderen Wertebereichen, z.B. $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$.

Beispiel C.36

(a) konstante Folge $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

(c) Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1, a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3$ Sie ergibt: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$

Definition C.39 (ε – Umgebung)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann nennen wir

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid \quad |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

die *ε–Umgebung* von a.

Definition C.40 (konvergente Folge)

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt *konvergent* gegen a, wenn in jeder ε–Umgebung von a "fast alle" Folgenglieder liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad |x - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und nennt a den *Grenzwert (Limes)* von $\{a_n\}$.

Eine reellwertige Folge heißt *divergent*, wenn es keinen solchen Grenzwert gibt.

Definition C.37 ((streng) monoton fallend/wachsend)

Eine reellwertige Folge $\{a_n\}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ ist. Gilt sogar $a_{n+1} > a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $\{a_n\}$ *streng monoton wachsend*. Analog definiert man *(streng) monoton fallend*.

Definition C.38 (beschränkt)

$\{a_n\}$ heißt *nach oben/unten beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben/unten beschränkt ist.

Bemerkung:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ werden als *Supremum/Infimum* von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert.

Definition C.41

Folgen, die gegen 0 konvergieren, heißen *Nullfolgen*.

Beispiel C.42

(a) Die konstante Folge ist konvergent:

$$a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach dem Archimedischen Axiom ein

$n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Wegen $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}, \ \forall n \geq n_0$ ist also

$$\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0), \ \forall n \geq n_0$$

(c) Die Folge $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Definition C.43 (uneigentliche Konvergenz, bestimmte Divergenz)

Sei $\{a_n\}$ eine Folge. Dann *strebt* a_n *gegen* ∞, $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty)$, falls für jedes $r > 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > r, \forall n \geq n_0$. In diesem Fall spricht man auch von *uneigentlicher Konvergenz* oder *bestimmter Divergenz*.

Analog definiert man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls für jedes $r < 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < r, \forall n \geq n_0$.

Beispiel C.44

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

Beispiel C.48

$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ist monoton fallend und von unten durch 0 beschränkt. Also ist diese Folge nach C.47 (iii) konvergent.

Satz C.49 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien $\{a_n\}, \{b_n\}$ *reelle Folgen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt:*

(a) *Falls* $a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *so ist* $a \leq b$.

(b) *Falls* $a_n < b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *so ist* $a \leq b$ *($a < b$ ist i.A. falsch!).*

(c) $\lim_{n\to\infty}\{a_n \pm b_n\} = a \pm b$

(d) $\lim_{n\to\infty}\{a_n \cdot b_n\} = a \cdot b$ *(d.h. insbesondere* $\lim_{n\to\infty}\{c \cdot a_n\} = c \cdot a$*).*

(e) *Ist* $b \neq 0$, *so existiert* n_0 *mit* $b_n \neq 0, \ \forall n \geq n_0$. *Dann sind auch* $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}_{n\geq n_0}, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\geq n_0}$ *konvergent und haben den Limes* $\frac{1}{b}$ *bzw.* $\frac{a}{b}$.

(f) $\{|a_n|\}$ *konvergiert gegen* $|a|$.

(g) *Sei* $m \in \mathbb{N}$ *und* $a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{a}$.

Satz C.45 (Beschränktheit konvergenter Folgen)

Eine konvergente Folge ist beschränkt, *d.h. sie ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.*

Satz C.46 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Satz C.47 (Konvergenzkriterien)

(i) Vergleichskriterium*: Seien* $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ *reelle Folgen mit* $a_n \leq b_n \leq c_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = b = \lim_{n\to\infty} c_n$. *Dann konvergiert* $\{b_n\}$ *und es gilt* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

(ii) Cauchy-Kriterium: *Eine reelle Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine* Cauchy–Folge *ist, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon)$$

(iii) *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergiert. Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert.*

Beispiel C.50

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{17}{n} = 17 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 17 \cdot 0 = 0$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}} = 1 \cdot \frac{1}{1+0} = 1$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^4 - 2n^2 + 1}{7n^4 + 11n^3 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{11}{n} + \frac{1}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 - 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \dfrac{5}{7}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad$ (wird in der Übung besprochen)