Satz C.67 (Quotientenkriterium von d'Alambert)

Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$. Dann gilt das Quotientenkriterium:

1. $\exists q < 1 \; \exists n_0 \; (n_0 \geq n_1)$, *so dass* $\forall n \geq n_0$ *gilt* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *ist absolut konvergent.*
2. $\exists n_0 \; (n_0 \geq n_1)$, *so dass* $\forall n \geq n_0$ *gilt* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *ist divergent.*

Bemerkung:

Es genügt nicht $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$; es muß ein solches (festes) q existieren. Etwa ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$ für $a_n = \frac{1}{n}$, aber $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

Beispiel C.68

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $c \in \mathbb{R}$.

Satz C.69 (Quotientenkriterium in Limes-Form)

Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$ und existiere ferner $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Dann gilt:

1. *Ist $q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.*
2. *Ist $q > 1$, so divergiert die Reihe.*

Satz C.70 (Wurzelkriterium von Cauchy)

Es gilt das Wurzelkriterium:

1. $\exists q < 1 \; \exists n_0$, *so dass* $\forall n \geq n_0$ *gilt* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *ist absolut konvergent.*
2. *Ist* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *für unendlich viele n, so ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *divergent.*

Beispiel C.71

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergiert absolut.

Satz C.72 (Wurzelkriterium in Limes-Form)

Wenn der Grenzwert $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q$ *existiert, so ist* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$

1. *absolut konvergent für $q < 1$.*
2. *divergent für $q > 1$.*

Ist $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$*, so ist keine Aussage möglich.*

Beispiel C.73

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ konvergiert absolut.

Definition C.74

Eine Reihe heißt *bedingt* konvergent, wenn sie konvergiert aber nicht absolut konvergiert.

Ein Kriterium für bedingte Konvergenz liefert

Satz C.75 (Leibniz-Kriterium)

Ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fällt $\{a_n\}$ monoton gegen Null, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$.

Beispiel C.76

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \; (0 < \alpha < 1)$

sind konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Bemerkung:

Die Bedingung $\lim\{a_n\} = 0$ ist notwendig, vergleiche Satz C.61. Wichtig ist auch die Monotonie von $\{a_n\}$: Zum Beispiel mit der Folge $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$ erhält man die (unbeschränkten) Partialsummen $1, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \ldots$ der harmonischen Reihe.

Umordnung, unbedingte Konvergenz

Bei endlichen Summen ist die Reihenfolge der Summanden beliebig, nicht aber bei unendlichen Reihen:

Beispiel C.77

$$\begin{array}{rcccccccccc}
s = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\dots \\
\frac{1}{2}s = & & +\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & +\dots \\
\hline
\frac{3}{2}s = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & & +\dots
\end{array}$$

Dabei stehen in der Summe dieselben Summanden wie in der Ausgangsreihe. Daher könnte man erwarten, daß die Grenzwerte s und $\frac{3s}{2}$ übereinstimmen, was aber wegen $s \neq 0$ ersichtlich nicht der Fall ist.

Definition C.78

Eine Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede Umordnung zum selben Wert konvergiert.

Satz C.79

Genau die absolut konvergenten Reihen sind unbedingt konvergent.

Beispiel C.80

Der Riemannsche Umordnungssatzbesagt: Man kann bedingt konvergente Reihen zu jedem beliebigen Wert s umordnen. Wir betrachten $\sum(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu}$ und geben den Wert $s = 1.5$ vor:

$$s^{(1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15} = 1.5\overline{3}$$
$$s^{(2)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{31}{30} = 1.0\overline{3}$$
$$s^{(3)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = \frac{137099}{90090} = 1.5\overline{218004}$$
$$s^{(4)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} = 1.27\overline{180042}.$$