

## Stetigkeit

### Motivation:

In technischen Systemen erwartet man häufig, dass sich das Resultat nur wenig ändert, wenn die Eingabegrößen nur gering variiert werden. Mathematisch kann man dies durch das Konzept der Stetigkeit formalisieren.

### Definition C.81 (Konvergenz gegen Grenzwert)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $\xi \in \mathbb{R}$ .  $f(x)$  konvergiert für  $x \rightarrow \xi$  gegen den Grenzwert  $\eta$ , falls für jede (!) Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \neq \xi$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \eta.$$

In diesem Fall schreiben wir  $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ .



### Beispiel C.82

- $f(x) = x^2$  hat für jedes  $\xi \in \mathbb{R}$  einen Grenzwert.
- Die Sprungfunktion  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$  hat in 0 (also an der Sprungstelle) keinen Grenzwert.

### Satz C.83 (Grenzwertsätze für Funktionen)

Wenn für die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Grenzwerte im Punkt  $\xi \in \mathbb{R}$  existieren, so gilt:

- $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)}$ , falls  $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$  für beliebige  $c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} |x| = |\xi|$



### Definition C.84 (Stetigkeit)

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $\xi \in \mathbb{R}$ , wenn dort Funktionswert und Grenzwert übereinstimmen, d.h. es ist:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow \xi} x) = f(\xi).$$

$f$  heißt stetig, wenn  $f$  in allen Punkten stetig ist.

### Satz C.85 ( $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium der Stetigkeit)

Für eine Funktion  $f$  sind äquivalent:

- $f$  ist stetig in  $\xi \in \mathbb{R}$ , d.h.  $f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ .
- Zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta(\epsilon) > 0$ , so dass:  
 $|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ .



### Bemerkung:

- Im Allgemeinen ist  $\delta$  von  $\epsilon$  und von  $\xi$  abhängig.
- Anschaulich bedeutet das  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium, daß es unter den Funktionswerten in der Nähe einer Stetigkeitsstelle keine Ausreißer gibt; eine ganze  $\delta$ -Umgebung von  $\xi$  wird unter  $f$  in einen  $\epsilon$ -Streifen um  $f(\xi)$  abgebildet. Hinreichend kleine Änderungen in den Argumenten einer stetigen Funktion führen also nur zu (beliebig) kleinen Änderungen der Funktionswerte.

### Beispiel C.86

$f(x) = x$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = e^{-x}$ ,  $f(x) = \sin x$  und  $f(x) = \cos x$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$ .



### Bemerkung

1. Satz C.83 besagt, dass für in  $\xi$  stetige Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch die Funktionen  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (falls  $g(\xi) \neq 0$ ) sowie  $c \cdot f(x)$  stetig in  $\xi$  sind. Ebenso ist die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$  stetig.
2. Die Komposition stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.
3. Die Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffe sind sinngemäß auch auf Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  übertragbar, deren Definitionsbereich  $D$  eine echte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. In diesem Fall liegen die betrachteten Folgen  $\{x_n\}$  in  $D$ .

### Beispiel C.87

1. Polynome sind auf  $\mathbb{R}$  stetig.
2. Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.
3.  $\cosh x$  und  $\sinh x$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$ .



### Satz C.88 (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt:

- (a) **Nullstellensatz:** Ist  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , so existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(\xi) = 0$ .
- (b) **Zwischenwertsatz:** Zu jedem  $c$  mit  $f(a) < c < f(b)$  existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(\xi) = c$ .
- (c) **Stetigkeit der Umkehrfunktion:** Ist  $f$  zusätzlich streng monoton wachsend auf  $[a, b]$ , so ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend.
- (d) **Maximum-Minimum-Eigenschaft:** Es existieren  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$  und  $f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ .

### Beispiel C.89 (Stetigkeit von Umkehrfunktionen)

1. Es sind  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$  auf  $\mathbb{R}_0^+$  und  $f(x) = \ln x$  auf  $\mathbb{R}^+$  stetig.
2. Die Arcusfunktionen  $\arcsin$ ,  $\arccos$  sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.



## Gleichmäßige Stetigkeit

Nach dem  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium C.85 sind stetige Funktionen solche, deren Funktionswert sich bei hinreichend kleinen Änderungen des Arguments nur beliebig wenig ändert; allerdings hängt im Allgemeinen  $\delta$  von  $\epsilon$  und von  $\xi$  ab. In manchen Zusammenhängen ist es aber wichtig, dass  $\delta$  nur von  $\epsilon$  und nicht von  $\xi$  abhängt, d.h. das man in einem ganzen Intervall zu einem  $\epsilon$  dasselbe  $\delta(\epsilon)$  wählen kann.

### Definition C.90 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gleichmäßig stetig auf  $D$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta(\epsilon) > 0$  existiert, so dass für alle  $x_1, x_2 \in D$  gilt:

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$



### Beispiel C.91

$f(x) = \frac{1}{x}$  ist nicht gleichmäßig stetig auf  $D = (0, \infty)$ , aber stetig.

### Satz C.92

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig auf  $[a, b]$ .

### Bemerkung:

Der Definitionsbereich im obigen Beispiel ist kein abgeschlossenes Intervall.

