Mathematik für Informatiker 2 Prof.PHD. Andreas GRIEWANK

Musterlösungen zu Serie 9

Aufgabe 1

a)

Ausgehend von der Gleichung

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2$$

berechnen wir mittels der Formel für die Ableitung implizit definierter Funktionen

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

die Ableitung von y. Dabei folgt F aus der definierenden Gleichung mittels umstellen nach 0, wie folgt

$$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - a^2$$

Damit folgt dann

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x + 2y}{2x - 2y} = -\frac{x + y}{x - y}$$

Die zweite Ableitung von y nach x berechnet sich nun mittels der zweiten Ableitung der impliziten Funktion

$$\begin{aligned}
y''(x) &= -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\Big) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\Big(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\Big) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\Big)^2 \right) = \\
&= -\frac{1}{2x - 2y} \left(2 + 2\Big(-\frac{x + y}{x - y}\Big) + 2\Big(-\frac{x + y}{x - y}\Big) - 2\Big(-\frac{x + y}{x - y}\Big)^2 \right) \\
&= \frac{2x^2 + 4xy - 2y^2}{(x - y)^3} = \frac{2a^2}{(x - y)^3}
\end{aligned}$$

b)

Berechne hier zunächst die Ableitungen von $F(x,y)$ separat.

$$F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

Damit folgt für die Ableitung von y nach x

$$y'(x) = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}})^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{\frac{y-x}{x^2+y^2}}\left(\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}(\frac{x+y}{x-y}) - \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}(\frac{x+y}{x-y}) + \frac{-y^2+x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}(\frac{x+y}{x-y})^2\right)$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

c)

In diesem Fall lautet F wie folgt

$$F(x,y) = x^y - y^x$$

Demnach folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1} - \ln y y^x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x x^y - xy^{x-1}$$

$$y'(x) = -\frac{yx^{y-1} - \ln y y^x}{\ln x x^y - xy^{x-1}} = -\frac{y^x}{x^y}\frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x} = \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{1 - \frac{x}{y}\ln y}{1 - \frac{y}{x}\ln x}\right) = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$$

Haben bei den Umformungen die Ausgangsgleichung mehrmals benutzt.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2} - (\ln y)^2 y^x$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (\ln x)^2 x^y - x(x-1)y^{x-2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x - y^{x-1} - xy^{x-1}\ln y = x^{y-1}(1 + y\ln x) - y^{x-1}(1 + \ln yx)$$

$$y'' = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}})^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{\ln x x^y - x y^{x-1}} \big(y(y-1)x^{y-2} - (\ln y)^2 y^x + (1 + y \ln x)(x^{y-1} - y^{x-1})(\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}) +$$

$$(1 + y \ln x)(x^{y-1} - y^{x-1})(\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}) + ((\ln x)^2 x^y - x(x-1)y^{x-2})(\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)})^2 \big) =$$

$$= \frac{y^2[y(1-\ln x)^2 - 2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y) - x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$$

Aufgabe 2

Die allgemeine Iterationsvorschrift des NEWTON-Verfahrens lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ausgehend von der Gleichung

$$f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}$$

berechnen wir zunächst die Ableitung

$$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Wir beginnen mit einem Startwert von $x_0 = 2$. Der erste Schritt liefert

$$x_1 = 2 - \frac{2\ln 2 - \frac{1}{2}}{\ln 2 + 1} = 1.476540273$$

Der zweite Schritt liefert

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 \ln x_1 - \frac{1}{2}}{\ln x_1 + 1} = 1.422276648$$

Der dritte Schritt liefert

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 \ln x_2 - \frac{1}{2}}{\ln x_2 + 1} = 1.421530081$$

Der vierte Schritt liefert

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 \ln x_3 - \frac{1}{2}}{\ln x_3 + 1} = 1.421529936$$

Aufgabe 3

Um eine Fixpunktiteration durchzuführen muss zunächst die zu lösende Gleichung auf die Form

$$\phi(x) = x$$

gebracht werden. Die hier zu lösende Gleichung lautet

$$x^2 - \ln x - 2 = 0$$

Auf die gesuchte Form gebracht lautet die Gleichung

$$\sqrt{\ln x + 2} = x$$

Nun muss die Funktion

$$\phi(x) = \sqrt{\ln x + 2}$$

auf Kontraktionseigenschaften untersucht werden im Intervall $[1.5, 1.7]$. Es gilt nun die Lipschitz-Konstante zu berechnen. Dieses vereinfacht der Satz C.137.
Die Funktion ϕ ist stetig differenzierbar auf dem Intervall $[1.5, 1.7]$, dann folgt

$$L = \sup\{|\phi'(\xi)| : 1.5 \leq \xi \leq 1.7\} = \sup\{|\frac{1}{2\sqrt{\ln x + 2}x}| : 1.5 \leq \xi \leq 1.7\} = |\frac{1}{2\sqrt{\ln 1.5 + 2}1.5}| = 0.214921179 < 1$$

Danach gilt ebenso

$$|\phi'(x)| \leq L < 1 \qquad x \in [1.5, 1.7]$$

und demnach ist ϕ Kontraktion, denn für $x_0 \in [1.5, 1.7]$ ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für ein ξ zwischen x_n und x_0:

$$|x_{n+1} - x_0| = |\phi(x_n) - \phi(x_0)| = |\phi'(\xi)||x_n - x| \leq \theta|x_n - x| < |x_n - x_0|$$

Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
Berechnen nun mittels der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

ausgehend von $x_0 = 1.6$ die ersten vier Iterationen.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \phi(1.6) = \sqrt{\ln 1.6 + 2} = 1.571624519 \\
x_2 &= \phi(x_1) = \sqrt{\ln x_1 + 2} = 1.565921393 \\
x_3 &= \phi(x_2) = \sqrt{\ln x_2 + 2} = 1.564760173 \\
x_4 &= \phi(x_3) = \sqrt{\ln x_3 + 2} = 1.564523112
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Fehlerabschätzung führen wir mittels der Ungleichung

$$|x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Demnach folgt mit dem oben berechneten L den Fehler

$$|x^* - x_4| \leq \frac{L^4}{1-L}|x_1 - x_0| = \frac{0.214921179^4}{1 - 0.214921179}|1.571624519 - 1.6| = 7.711641429 \cdot 10^{-5}$$

Suchen nun mittels der gleichen Formel nach dem n, so dass $|x^* - x_n| \leq 10^{-7}$.

$$\frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq 10^{-7} \Leftrightarrow L^n \leq (1-L)\frac{10^{-7}}{|x_1 - x_0|}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\ln(L)} \ln\left((1-L)\frac{10^{-7}}{|x_1 - x_0|}\right) \qquad , \text{da } L < 1$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\ln(0.214921179)} \ln\left((1-0.214921179)\frac{10^{-7}}{|1.571624519 - 1.6|}\right) = 8.32$$

Also ist das kleinste n, für dessen Iterationsschritt der Fehler kleiner als 10^{-7} ist n=9.