



## Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker II

### Serie 1. (Abgabe: bis 26.04.05)

**Aufgabe 1:** Zeige

a)  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$  und  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$  (1 Punkt)

b)  $|ab| = |a||b|$  (1 Punkt)

c)  $|a+b| \leq |a|+|b| \implies ||a|-|b|| \leq |a+b|$  (2 Punkte)

d)  $|x| < y \quad \forall y \implies x = 0$  (1 Punkt)

e)  $|a+b| \leq |a|+|b| \implies \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$  (2 Punkte)

**Aufgabe 2:** Für positive Zahlen  $a, b$  definiert man das *arithmetische*, *geometrische* und *harmonische Mittel* durch

$$A(a, b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a, b) := \sqrt{ab}, \quad H(a, b) := \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}$$

a) Man beweise (3 Punkte)

$$H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$$

b) und zeige, dass die Gleichheit der Mittel nur für  $a = b$  eintritt. (2 Punkte)

**Aufgabe 3:** Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  definieren wir  $-A := \{-a \mid a \in A\}$ . Zeige

a)  $\inf\{-A\} = -\sup\{A\}$  (2 Punkte)

b)  $\sup\{-A\} = -\inf\{A\}$  (2 Punkte)

**Aufgabe 4:** Es seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Man beweise:

a) Ist  $ad - bc \neq 0$ , so ist auch  $cx + d \neq 0$  und

$$y := \frac{ax + b}{cx + d}$$

ist eine irrationale Zahl (4 Punkte)

b) Ist  $ad - bc = 0$ , so ist entweder  $cx + d = 0$  oder  $y \in \mathbb{Q}$ . (4 Punkte)