Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank PhD.; Dipl.Math. T. Bosse; Dipl.Math. F. Lapp;
Dipl.Math. N. Perkowski; Dipl.Math. C. Stadmüller

Probeklausur Analysis II (S 2013)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Menge $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 > 0, x_2 = 2x_1\}$ und die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x_1 - y_1|$.

(i) Beweisen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(ii) Prüfen Sie die Voraussetzungen von Banachsfixpunktsatz für die Funktion $G : X \to X$ mit $G(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2)$.

(iii) Geben Sie die ε-Kugel $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\} \subset X$ um einen Punkt $x_0 \in X$ an und skizzieren Sie diese.

Aufgabe 2:

Werten Sie die folgenden Integrale aus. Geben sie einen nachvollziehbaren Lösungsweg an.

$$(i) \int \sqrt{x} \ln x \ dx, \quad (ii) \int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx, \quad (iii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

Aufgabe 3:

Wo ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = 4|x_1(x_2 + 1)| + 2$ partiell beziehungsweise total differenzierbar. Bestimmen Sie die Ableitungen an allen Punkten, an welchen diese existieren.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$4x^2 - y^2 = 0 \text{ und } y^2 - 9z^2 = 0.$$

(i) An welchen Lösungspunkten in $\mathbb{R}^3$ definiert das Gleichungssystem (y, z) lokal als implizite Funktion $g(x) = (y, z)$?

(ii) Geben Sie eine explizite Formel der impliziten Funktion $g(x) = (y, z)$ in $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ an und bestimmen Sie deren Ableitung, falls existent.

(iii) Prüfen Sie nun die Voraussetzungen des impliziten Funktionentheorems an dem Punkt $(x, y, z) = (3, -6, 2)$ und wenden Sie dies (falls möglich) an, um die Ableitung der impliziten Funktion zu berechnen.

Aufgabe 5:

Geben Sie das Innere, den Rand und den Abschluss der Menge $M = M_1 \cup M_2$ mit

$$M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in [0, x_1^2)\}$$
$$M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [-x_1^2, 0)\}$$

in $\mathbb{R}^2$ an und skizzieren Sie die Mengen.