Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dipl.Math. T.Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS II (S13) Serie 1

Abgabe bis 22.04.2013 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1.1: (4 Punkte)

Sei $P_n(x)$ ein beliebiges normiertes Polynom n-ten Grades in $x \in \mathbb{R}$ der Form

$$P_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x^1 + b_0$$

mit beliebigen, aber festen Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{\exp(x)} = 0$$

gilt. M.a.W. die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom von x.

Aufgabe 1.2: (4 Punkte)

Approximieren Sie die Funktion

$$f(x) = \ln(1+x)$$

durch das Taylorpolynom sechsten Grades am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Benutzen Sie die Approximation um einen Nährungswert von $\ln(1.2)$ zu berechnen und vergleichen Sie diesen mit dem exakten Wert.

Aufgabe 1.3: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen $\|x\|_{\frac{1}{2}} = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$, $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ und $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Überprüfen Sie für jede der Funktionen, ob sie eine Norm ist.
2. Beweisen Sie, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}^2$ die Ungleichung

   $$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{2}\|x\|_2 \quad \text{gilt.}$$

3. Folgern Sie aus der vorherigen Teilaufgabe, dass jede Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ auch ein Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ ist. Gilt die Implikation auch in der anderen Richtung?

Aufgabe 1.4: (4 Punkte)

Bestimmen Sie mittels der Ober- und Untersumme das Integral von $f(x) = x^2 + 1$ über dem Intervall $[0, 2]$.