HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. A.GRIEWANK PH.D., DIPL.MATH. T.BOSSE, DIPL.MATH. F.LAPP,
DIPL.MATH. N.PERKOWSKI, DIPL.MATH. C.STADTMÜLLER

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS II (S13) Serie 5

Abgabe bis 20.05.2013 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 5.1: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Bogenlänge $B(\varepsilon)$ der Funktion

$$f(x) = x^{2/3}$$

über dem Intervall $[\varepsilon, 1] \subset \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{\varepsilon \to 0} B(\varepsilon)$.

Aufgabe 5.2: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{a} - 1)$$

für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ divergiert.

Hinweis: Für $z > 0$ gilt $z - 1 \geq \log z$.

Aufgabe 5.3: (4 Punkte)

Sei $d(x, y)$ eine beliebige Metrik auf $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann auch

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine Metrik ist. Prüfen Sie nach, ob $\tilde{d}(x, y)$ translationsinvariant ist, falls $d(x, y)$ diese Eigenschaft erfüllt.

Aufgabe 5.4: (4 Punkte)

Skizzieren Sie für $n = 4$ die Form, welche durch die Polarkoordinatengleichung

$$r = \left|\sin(\frac{n}{2}\varphi)\right|, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

definiert ist. Beweisen Sie für beliebige $n \in \mathbb{N}$, dass der eingeschlossene Flächeninhalt $\pi/2$ beträgt.