Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A.Griewank Ph.D., Dipl.Math. T.Bosse, Dipl.Math. F.Lapp,
Dipl.Math. N.Perkowski, Dipl.Math. C.Stadtmüller

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS II (S13) Serie 8

Abgabe bis 17.06.2013 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 8.1: (4 Punkte)

Seien M_1 und M_2 zwei wegzusammenhängende Mengen mit $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.
Zeigen Sie, dass $M_1 \cup M_2$ wieder wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 8.2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Form des Gradienten der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2/(0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

und werten Sie diese an den Stellen $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$ aus. Verifizieren Sie ausserdem, dass $(0,0)$ der Gradient an $(0,0)$ ist.

Aufgabe 8.3: (4 Punkte)

(i) Betrachten Sie die beiden Funktionen f, g mit $f(t) = O(|t|^q)$ und $g(t) = O(|t|^p)$ für positive $p, q \in \mathbb{R}$ und $t \to 0$. Zeigen Sie, dass $f(t) + g(t) = O(|t|^{\min(p,q)})$ für $t \to 0$ und beweisen Sie, dass keine stärkere Aussage gefunden werden kann.

(ii) Sei h eine differenzierbare Funktion mit $h(t) = O(|t|^q)$ für positives q und $t \to 0$. Prüfen Sie, ob daraus die Aussage $h'(t) = O(|t|^{q-1})$ für $t \to 0$ folgt.

Aufgabe 8.4: (4 Punkte)

Beschreibe X^p den Raum der Polynome mit Grad kleiner gleich $p \in \mathbb{N}$ über einer Variablen.

(i) Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$, der Integrationsoperator $\int$ und die Shift-Operatoren S^+, S^- lineare Operatoren sind, d.h.

$$\frac{d}{dx} \in L(X^{p+1}, X^p), \int \in L(X^p, X^{p+1}), S^+ \in L(X^p, X^{p+1}) \text{ und } S^- \in L(X^{p+1}, X^p).$$

(ii) Bestimmen Sie für die vier Operatoren die Matrixdarstellung $A_{\frac{d}{dx}}$, $A_{\int}$, A_{S^+} und A_{S^-}. Wählen Sie dazu die Basis der Monome.

(iii) Prüfen Sie, ob die beiden Operatoren $S^- \circ \int$ und $\frac{d}{dx} \circ S^+$ invers zueinander sind, d.h. ob

$$(\frac{d}{dx} \circ S^+) \circ (S^- \circ \int) = (S^- \circ \int) \circ (\frac{d}{dx} \circ S^+) = id \in L(X^p, X^p) \text{ gilt.}$$