Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A.Griewank Ph.D., Dipl.Math. T.Bosse, Dipl.Math. F.Lapp,
Dipl.Math. N.Perkowski, Dipl.Math. C.Stadtmüller

Übungsaufgaben zur Vorlesung
ANALYSIS II (S13)
Serie 9

Abgabe bis 24.06.2013 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 9.1: (4 Punkte)

Seien $f : X \to Y$ und $g : X \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen in einer offenen Umgebung um $x \in X$ und gelte $g(x) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ differenzierbar ist und die Ableitung $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$ besitzt.

Aufgabe 9.2: (4 Punkte)

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für alle } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist, aber die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$ nicht stetig sind.

(ii) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für alle } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass alle partiellen Ableitungen von g in $(0,0)$ existieren, aber g in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 9.3: (4 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Funktion deren Bild immer Norm 1 besitzt, d.h. $\|F(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $< F'(t), F(t) >= 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt und geben Sie eine geometrische Interpretation des Resultats.

Aufgabe 9.4: (4 Punkte)

Geben Sie eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ mit $[x,y] \subset D$ an, so dass

$$F(y) - F(x) \neq F'(z)(y-x) \text{ für alle } z \in [x,y].$$

Wenden Sie den Schrankensatz an, um $|F(y) - F(x)|$ nach oben zu beschränken.