Aufgabe 1.1. (8 Punkte). Es seien die folgenden Relationen gegeben.

$$R_1 = \{(x,y) \,|\, x,y \in \mathbb{R},\, x \le y\}, \qquad R_2 = \{(x,y) \,|\, x,y \in \mathbb{R},\, x = y\},$$

$$R_3 = \{(k, \frac{1}{k}) \,|\, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}, \qquad R_4 = [1,2] \times [1,2],$$

$$R_5 = \{(n,k) \,|\, n,k \in \{1,2,3,4,5,6\},\, n|k\}.$$

a) Skizzieren Sie die Graphen dieser Relationen, d.h. markieren Sie die zur Relation gehörenden Paare in einem passenden Koordinatensystem.

b) Wie kann man am Graphen einer homogenen Relation erkennen, ob die Relation
   (i) reflexiv ist?
   (ii) symmetrisch ist?

c) Entscheiden Sie für jede der obigen Relationen, welche Eigenschaften aus Homogenität, Reflexivität, Transitivität, Symmetrie gegeben sind und welche nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welche der obigen Relationen sind Funktionen? Geben Sie jeweils die Abbildungsvorschrift an.

Aufgabe 1.2. (8 Punkte). Für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Aussage

$$(x+1)^n \ge 1 + nx. \tag{$A(n,x)$}$$

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = (1+x)^n$ und $g(x) = 1 + n \cdot x$ für $n = -2,-1,0,1,2$. Entscheiden Sie für alle $(n,x) \in \{-2,-1,0,1\} \times \{-\sqrt{5}-1, -\frac{3}{2}, 0, 1\}$, ob $A(n,x)$ wahr oder falsch ist. Geben Sie die Ergebnisse in Form einer Tabelle an.

b) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass $A(n,x)$ für alle $x \ge -1$ und alle $n \ge 0$ gilt, wenn man vereinbart, dass $0^0 = 1$ ist.

c) Unter welchen zusätzlichen Vorraussetzungen an $n \in \mathbb{Z}, n \ge 0$ und $x \in \mathbb{R}, x \ge -1$ ist die Ungleichung strikt erfüllt?

Aufgabe 1.3. (8 Punkte). Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind und geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Für einen Körper $(\mathbb{K},+,\cdot)$ und $x \in \mathbb{K}$ gilt stets $-(-x) = x$.

b) Für einen Körper $(\mathbb{K},+,\cdot)$ und $x,y \in \mathbb{K}$ gilt stets $-(x+y) = -x-y$.

c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{N} kx^k = \sum_{k=0}^{N-1} (k-1)x^k$.

d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{N} kx^k = \sum_{\ell=0}^{N-1} (\ell+1)x^{\ell+1}$.

e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{2k+1} \cdot (2k+1) \cdot x^{2k+1} - \sum_{k=2}^{N+1} 2 \cdot (-1)^{2k-2} \cdot k \cdot x^{2(k-1)} = -\sum_{k=1}^{2N} kx^k.$$

f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.