Aufgabe 2.1. (6 Punkte) *Bisektionsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen.*
Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Ferner sei eine Intervallfolge $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wie folgt definiert: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $I_k = [a_k, b_k]$, wobei $a_1 = a$, $b_1 = b$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \qquad \begin{array}{lll} a_{k+1} = c_k, & b_{k+1} = b_k, & \text{falls } f(c_k) \le 0, \\ a_{k+1} = a_k, & b_{k+1} = c_k, & \text{falls } f(c_k) > 0. \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass für $a = 0$, $b = 2$ und $f(x) = x^2 - 2$ die obigen Vorraussetzungen erfüllt sind und berechnen Sie I_1, I_2 und I_3.

b) Zeigen Sie, dass $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist.

c) Programmieren Sie in Python, Matlab, C(++) oder Java ein Bisektionsverfahren, das die Nullstelle $c \in (a, b)$ von f mit einer vorgegebenen Genauigkeit berechnet. Geben Sie den ausgedruckten Programm-Code ab.

d) Berechnen Sie die Nullstelle $c \in (2, 3)$ von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^3 + 25x^2 - 30x - 17$ auf zwei Dezimalen genau. Geben Sie in jedem Iterationsschritt a_k, b_k, c_k und $f(c_k)$ an.

Aufgabe 2.2. (6 Punkte) Berechnen Sie

$$A_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [0, k), \qquad A_2 = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{k}\right), \qquad A_3 = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{k}\right), \qquad A_4 = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{k-1}{k}, \frac{k+1}{k}\right).$$

Aufgabe 2.3. (6 Punkte). Es sei $M = [1, 2) \subset \mathbb{R}$. Stellen Sie die folgenden Mengen graphisch dar und schreiben Sie sie als endliche Vereinigung von Intervallen:

$$\begin{array}{lll} M_1 = -M, & M_2 = 2 \cdot M - 2, & M_3 = M + M_1, \\ M_4 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 - 3x < -4 \le 11 - 5x\}, & M_5 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x^2 - 1| > 0\}, & M_6 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |2x| > 5\}. \end{array}$$

Aufgabe 2.4. (6 Punkte) Bestimmen Sie jeweils alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = 1, \qquad \sqrt{1 - x^2} = x - 1.$$

Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x^2}{1-x}$ und zeichnen Sie deren Graphen.