Aufgabe 3.1. (6 Punkte) Die Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}, \qquad v_n = \frac{n^2-25}{n^2+1}.$$

a) Finden Sie eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ so dass für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ gilt $|u_n| < \frac{1}{100}$.

b) Finden Sie eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ so dass für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ gilt $|v_n - 1| < \frac{1}{350}$.

c) Zeigen Sie mithilfe der Definition des Grenzwertes, dass $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$ ist.

Aufgabe 3.2. (6 Punkte) *Beweis von Satz 2.3a) aus der Vorlesung.*
Gegeben seien zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit den Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

a) Zeigen Sie, dass auch die durch $c_n := a_n + b_n$ definierte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert, und dass ihr Grenzwert durch $\lim_{n\to\infty} c_n = a + b$ gegeben ist.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = 2(n-1)^{-2} + \frac{n^2-25}{n^2+1}, \qquad y_n = \frac{\sum_{k=1}^{3} k^2 n^k}{3n^3}.$$

Aufgabe 3.3. (6 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei K_n die Anzahl der Kaninchenpaare K_n nach n Monaten unter der Annahme, dass jedes Paar pro Monat ein neues Paar zeugt, welches aber erst im übernächsten Monat zeugungsfähig ist.

a) Bestimmen Sie für $K_1 = 1$ (und damit $K_2 = 1$) die Zahlen K_3, K_4, K_5, K_6.

b) Finden Sie für $n \geq 2$ einen Ausdruck für K_{n+1} als Funktion von K_n und K_{n-1}. Konvergiert die Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{pmatrix} K_{n+1} \\ K_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_n \\ K_{n+1} \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für K_{100}. Werten Sie diese mit einem Taschenrechner aus. *(Hinweis: Nutzen Sie die Diagonalisierung der obigen Matrix.)*

Aufgabe 3.4. (6 Punkte) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Aussage.

a) Für jede uneigentlich konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

b) Für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine uneigentlich konvergente Folge.