Aufgabe 4.1. (6 Punkte). Gegeben seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, wobei für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}, \qquad y_n = \sqrt{n^2 - 3n} - n, \qquad z_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Welche dieser Folgen konvergieren, und welche nicht? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 4.2. (6 Punkte) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Aussage.

a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ wobei $a \leq b$ ist, so folgt dass $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$.

b) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ wobei $a < b$ ist, so folgt dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < b_n$.

c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung, so folgt dass $\lim_{n\to\infty} a_{\ell(n)} = a$.

d) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Abbildung, so folgt dass $\lim_{n\to\infty} a_{\ell(n)} = a$.

Aufgabe 4.3. (6 Punkte) Gegeben sei die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

a) Berechnen Sie c_1, c_2 und c_3.

b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq c_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

c) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $c_n \leq b_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

d) Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$

Aufgabe 4.4. (6 Punkte). Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, wobei für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{8n^6 + 5n^2 + 3}}{n^2 + 1}, \qquad b_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad c_n = \frac{\sin(n^2) - \cos(n^3)}{n}.$$

Welche dieser Folgen konvergieren, und welche nicht? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.