Aufgabe 5.1. (6 Punkte)

a) Zeigen Sie mithilfe der Bernoulli-Ungleichung, dass für $c \geq 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

b) Konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{c})_{n\in\mathbb{N}}$ auch für $0 < c < 1$? Falls ja, gegen welchen Grenzwert?

Aufgabe 5.2. (6 Punkte)

a) Beweisen Sie: Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ und eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq N \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

b) Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ seien nichtnegative reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_1^n + c_2^n + \cdots + c_m^n} = \max\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}.$$

Aufgabe 5.3. (6 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ die rekursiv definierte Folge mit $a_1 = 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2 + a_n}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}}$.

b) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt ist.

c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

d) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Folge die Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ löst. Welche der beiden Lösungen der Gleichung ist der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

e) Geben Sie eine Folge rationaler Zahlen an, die gegen $\sqrt{5}$ konvergiert.

Aufgabe 5.4. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie die zur Dualzahl $1011,0011$ gehörige Dezimalzahl.

b) Berechnen Sie die ersten sieben Stellen der zur Dezimalzahl $1,4$ gehörenden Dualzahl.

c) Es sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Beweisen Sie: Wenn in der b-adischen Darstellung einer reellen Zahl x nur endlich viele Ziffern kleiner als $b - 1$ sind, dann gibt es eine endliche b-adische Darstellung von x (d.h. eine Darstellung mit nur endlich vielen Ziffern ungleich Null).