Aufgabe 6.1. (6 Punkte) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt K*-periodisch* (oder *periodisch mit der Periode* K), wenn eine kleinste Zahl $K \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_{n+K} = x_n.$$

Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ periodisch, so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Element x_n ein Häufungspunkt der Folge, sie besitzt also höchstens K, und, falls $K \geq 2$ ist, mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte.

a) Geben Sie ein Beispiel einer Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit drei Häufungspunkten an, welche aber nicht periodisch ist.

b) Warum gilt für konvergente K-periodische Folgen stets $K = 1$?

Wir betrachten nun die rekursiv wie folgt definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a_1, a_2 > 0$ werden beliebig gewählt, und für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1}}{a_n}.$$

c) Berechnen Sie für $a_1 = a_2 = 1$ die Zahlen $a_3, a_4, \ldots, a_{10}$.

d) Für welche $a_1, a_2 > 0$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und für welche nicht?
(Hinweis: Man kann zeigen, dass die Folge periodisch ist.)

Aufgabe 6.2. (6 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz, bzw. Divergenz und diskutieren Sie jeweils die Anwendbarkeit von Quotienten- und Wurzelkriterium.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{5 \cdot 3^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}(-1)^k\right).$$

Aufgabe 6.3. (6 Punkte) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge besitzt einen Häufungspunkt.

b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^{k+1}$ ist konvergent.

c) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{k^2}\right)^k$ ist absolut konvergent.

d) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$.

e) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}$.

Aufgabe 6.4. (6 Punkte) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergiert. Bleibt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist?