Aufgabe 7.1. (6 Punkte) Für eine reelle Zahl $z \in (-1, 1)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sei $a_k = (-1)^k z^k$ und $b_k = z^k$.

a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k und den Wert des Cauchy-Produkts

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

c) Reproduzieren Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ aus b) ohne Satz 4.10 der Vorlesung zu benutzen.

Aufgabe 7.2. (6 Punkte) Wir betrachten die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit

$$a_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \qquad \text{und} \qquad b_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}.$$

a) Untersuchen Sie die Konvergenz der beiden Reihen.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k des Cauchy-Produkts $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ der beiden Reihen.

c) Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|c_{k+1}| = \frac{1}{2}|c_k| + \frac{1}{k+2}$.

Aufgabe 7.3. (6 Punkte) *(Fortsetzung von Aufgabe 7.2)* Wir betrachten das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ der beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ aus Aufgabe 7.2.

a) Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{k-i}(i+1)} \geq \frac{2}{k+1}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(|c_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist.

c) Warum ist $(|c_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge?

d) Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt dieser beiden Reihen konvergiert. Warum kann man hier Satz 4.10 aus der Vorlesung nicht anwenden?

Aufgabe 7.4. (6 Punkte) Wir betrachten wieder die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit den Grenzwerten a, b und c aus den Aufgaben 7.2 und 7.3. Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben Python, C(++), Matlab oder Java und geben Sie einen Ausdruck Ihres Programmcodes ab.

a) Berechnen Sie Zahlen $N_b, N_c \in \mathbb{N}$, so dass $|\sum_{k=0}^{N_b} b_k - b| \leq \frac{3}{2} \cdot 10^{-3}$ und $|\sum_{k=0}^{N_c} c_k - c| \leq 10^{-3}$.

b) Verifizieren Sie numerisch, dass $|\sum_{k=0}^{N_c} c_k - a \cdot \sum_{k=0}^{N_b} b_k| \leq 2 \cdot 10^{-3}$.

c) Liegt $\ln(2)$ im Intervall $[\sum_{k=0}^{N_b} b_k - \frac{3}{2} \cdot 10^{-3}, \sum_{k=0}^{N_b} b_k + \frac{3}{2} \cdot 10^{-3}]$?