Aufgabe 8.1. (6 Punkte) Beweisen Sie dass für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ gilt:

a) $a = \inf([a, b))$

b) $a = \min([a, b))$

c) Das halboffene Intervall $[a, b)$ ist nicht offen im Sinne von Definition 5.2.

d) Das halboffene Intervall $[a, b)$ ist nicht abgeschlossen im Sinne von Definition 5.3.

Aufgabe 8.2. (6 Punkte) Es seien die folgenden Mengen gegeben:

$$M_1 = [0, 1], \qquad M_2 = (1, 2), \qquad M_3 = [2, 3),$$
$$M_4 = \{1, \sqrt{2}, \pi\}, \qquad M_5 = \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}, \qquad M_6 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right].$$

a) Welche dieser Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind offen, welche sind abgeschlossen und welche sind weder offen noch abgeschlossen?

b) Geben zu jeder dieser Mengen Infimum, Supremum, und, falls sie existieren, Minimum und Maximum an. Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

Aufgabe 8.3. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie den Limes Superior und den Limes Inferior der Folgen

$$\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}.$$

b) Es seien $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{k \to \infty}(a_k + b_k) \leq \limsup_{k \to \infty}(a_k) + \limsup_{k \to \infty}(b_k).$$

c) Geben Sie ein Beispiel für zwei Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass in b) Gleichheit, und ein Beispiel, so dass in b) die strikte Ungleichung „$<$“ gilt.

d) Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $r := \limsup_{k \to \infty}(\sqrt[k]{|a_k|})$. Zeigen Sie dass gilt: Wenn $r < 1$ ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, und wenn $r > 1$ ist, dann divergiert die Reihe.

Aufgabe 8.4. (6 Punkte) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere, beschränkte Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\inf(-A) = -\sup(A)$.

b) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

c) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$.