Aufgabe 9.1. (6 Punkte) Es sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Für eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ beziehungsweise eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ definieren wir die mengenwertige Umkehrfunktion von f durch

$$f^{-1}(z) := \{x \in X \mid f(x) = z\}, \qquad f^{-1}(M) := \bigcup_{z \in M} f^{-1}(z) = \{x \in X \mid f(x) \in M\}.$$

Ausserdem seien die Funktionen $g, h, j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } x < 1, \\ (x-1)^2, & \text{für } x \geq 1. \end{cases} \qquad h(x) = 1, \qquad j(x) = x^4 + 1.$$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsvorschriften der Funktionen
$$a = j + 2g - h, \qquad b = g^2 = g \cdot g, \qquad c = g \circ j, \qquad d = h \circ g$$

b) Bestimmen Sie die Mengen
$$A = g^{-1}(1), \qquad B = h^{-1}(2), \qquad C = j^{-1}(2),$$
$$D = g^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}), \qquad E = h^{-1}([0, 2]), \qquad F = j^{-1}((0, 2)).$$

c) Welche der Funktionen g, h, j sind stetig, und welche nicht?

Aufgabe 9.2. (6 Punkte) Es sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ sei stetig.

a) Zeigen Sie, dass das Urbild einer offenen Menge unter f offen ist, d.h. zeigen Sie, dass gilt: Ist $M \subset \mathbb{R}$ offen, so ist auch $f^{-1}(M)$ offen.
(Hinweis: Sie können hierbei die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit benutzen.)

b) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $X \subset \mathbb{R}$, eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ und eine offene Menge M an, so dass $f^{-1}(M)$ nicht offen ist.

Aufgabe 9.3. (6 Punkte) Es sei $X \subset \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ eine reelle Zahl und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa |x - y|.$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche die obige Bedingung mit $\kappa = 2$ erfüllt.

Aufgabe 9.4. (6 Punkte) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten jeweils durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Für alle Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f \cdot g = g \cdot f$.

b) Für alle Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f \circ g = g \circ f$.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Wenn die Folge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert, dann konvergiert auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht.

d) Ist $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt, dann ist auch die Menge der Berührungspunkte von M beschränkt.

e) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und ist $f \circ g$ stetig, so ist auch f stetig.

f) Ist $M \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ offen.