Aufgabe 10.1. (6 Punkte)

a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie dass ein $c \in [a, b]$ existiert, so dass $f(c) = c$.
(Hinweis: Man kann die Funktion $\Phi(x) = f(x) - x$ betrachten.)

b) Eine Person legt in einer Stunde 4 Kilometer zurück. Zeigen Sie, dass es eine Zeitspanne von 30 Minuten gibt, in der die Person genau 2 Kilometer zurücklegt.

Aufgabe 10.2. (6 Punkte) Es seien die Funktion $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |\exp(x+1) - 1|, \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 1 \\ x^2 & \text{falls } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{falls } x > 4 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Graphen von f und g.

b) Welche der Funktionen sind stetig und welche nicht?

c) Untersuchen sie die Monotonie der angegebenen Funktionen.

d) Bestimmen Sie möglichst große Mengen $X_f, X_g \subset \mathbb{R}$ mit $1 \in X_f$ und $1 \in X_g$ so, dass die Funktionen $f|_{X_f} : X_f \to \mathbb{R}, g|_{X_g} : X_g \to \mathbb{R}$ injektiv sind.

e) Bestimmen Sie die Wertebereiche $F = f(X_f)$ und $G = G(X_g)$.

f) Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen $f^{-1} : F \to \mathbb{R}$, $g^{-1} : G \to \mathbb{R}$ und skizzieren Sie deren Graphen.

Aufgabe 10.3. (6 Punkte) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Aussage jeweils durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Sind f und g gleichsinnig monoton, so ist auch $f + g$ monoton.

b) Sind f und g gleichsinnig monoton, so ist auch $f \cdot g$ monoton.

c) Sind f und g monoton, so ist auch die Komposition $f \circ g$ monoton.

d) Sind f und $f \circ g$ streng monoton steigend, so ist auch g streng monoton steigend.

e) Ist $f \circ g$ streng monoton steigend, so muss sowohl f als auch g streng monoton steigend sein.

Aufgabe 10.4. (6 Punkte)

a) Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ mit $x < y < x + \epsilon^3$ gilt

$$\sqrt[3]{y} < \sqrt[3]{x + \epsilon^3} \leq \sqrt[3]{x} + \epsilon.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ gleichmäßig stetig ist.

c) Beweisen Sie, dass für jedes $p \in \mathbb{N}$ die p-te Wurzelfunktion $f_p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_p(x) = \sqrt[p]{x}$ gleichmäßig stetig ist.