Aufgabe 1. (8 Punkte) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen 1 Punkt abgezogen. Eine nichtbeantwortete Frage wird mit Null Punkten bewertet. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten, und maximal 8 Punkten bewertet.

wahr	falsch	
☐	☐	Für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^k$ konvergent.
☐	☐	Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ falls $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $a_n = 1$ falls $n \in \mathbb{N}$ gerade hat nur einen Häufungspunkt.
☐	☐	Die b-adische Darstellung der rationalen Zahl $\frac{70}{9}$ mit $b = 3$ ist $21,21$.
☐	☐	Das Cauchy-Produkt der beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ ist $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-k} - 2^{-2k}\right).$$
☐	☐	Es gilt $\inf\{x \in \mathbb{R} \,\vert\, x \geq 0 \text{ und } e^x < 1\} = 0$.
☐	☐	Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x-1} - 1$ besitzt einen Fixpunkt im Intervall $[0, 1]$.
☐	☐	Die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $g(x) = \frac{1}{2}\cos(x)^2$ falls $x \leq 0$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$ falls $x \geq 0$ ist stetig.
☐	☐	Die Abbildung $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \vert\cos(\frac{1}{x})\vert$ ist differenzierbar.
☐	☐	Es gilt $\limsup_{n\to\infty}((n \mod 4) + \frac{1}{n+1}) = \frac{9}{2}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + (\sqrt{n} + 1)^3 + 2\sqrt{n}}{n + 2\sin n}$; b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt{1 - \frac{5}{n}}\right)$.

Aufgabe 3. (6 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 1}{2^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b] \to [a, b]$ sei stetig und differenzierbar auf (a, b) mit nicht-negativer Ableitung, d.h. für alle $\xi \in (a, b)$ sei $f'(\xi) \geq 0$. Außerdem sei $a_0 \in [a, b]$ gegeben und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = f(a_{n-1})$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi \in (a, b)$ existiert so, dass
$$a_{n+2} - a_{n+1} = f'(\xi)(a_{n+1} - a_n).$$

b) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = (1 + x + \frac{1}{2}x^2) \cdot e^{-x}$.

a) Untersuchen Sie die Monotonie von f.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$C = (1 + x + \frac{1}{2}x^2) \cdot e^{-x} \qquad (\star)$$

für jedes $C > 0$ genau eine Lösung besitzt.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $(\star)$ für $C = 1$.

d) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $(f^{-1})'(1)$ von f an der Stelle 1.

Aufgabe 6. (6 Punkte). Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Grenzwerte,

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{x^n - 1}$

Aufgabe 7. (4 Punkte). Berechnen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin(2x) \cdot e^x$$

im Punkt $x_0 = 0$.

Hinweise zur Klausur:

1. Sie können in der Klausur ein beidseitig von Hand beschriebenes A4-Blatt benutzen.
2. Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
3. Versehen Sie <u>alle Blätter</u> mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
4. Alle Schritte sollten möglichst gut begründet werden.
5. Aufgaben können auch in Teilen bearbeitet werden.
6. Nach Beendigung der Klausur sind die Aufgabenblätter, die gelösten Aufgaben, sowie die Schmierzettel abzugeben. Die Aufgabenblätter sind durchzunummerieren.