Aufgabe 1. (8 Punkte)

a) Falsch, z.B. für $a = 1$ ist konvergiert die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=0}^{N} 1^k\right)_{N\in\mathbb{N}} = (N+1)_{N\in\mathbb{N}}$ nicht.

b) Falsch, 0 und 1 sind zwei Häufungspunkte der Folge.

c) Wahr, $2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} = \frac{70}{9}$.

d) Wahr (nachrechnen)

e) Falsch, denn $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0 \text{ und } e^x < 1\} = \emptyset$.

f) Falsch. Angenommen $x \in [0, 1]$ ist Fixpunkt von f, dann folgt $e^{x-1} - 1 = f(x) = x \in [0, 1]$, also muss gelten $e^{x-1} \in [1, 2]$. Wegen $e^{x-1} \geq 1$ ist $x - 1 \geq 0$ und somit $x \geq 1$. Also folgt $x = 1$. Es ist aber $f(1) = 0$, also ist 1 kein Fixpunkt von f und somit besitzt f keinen Fixpunkt im Intervall $[0, 1]$.

g) Falsch, g ist nicht stetig im Punkt $x = 0$.

h) Falsch, h ist z.B. im Punkt $x = \frac{2}{\pi}$ nicht differenzierbar.

i) Falsch, $\limsup_{n\to\infty}((n \mod 4) + \frac{1}{n+1}) = 3$

(Die Begründungen waren in der Probeklausur nicht gefragt.)
Aufgabe 2. (4 Punkte).

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1 + (\sqrt{n} + 1)^3 + 2\sqrt{n}}{n + 2\sin n} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{5}{\sqrt{n}} + 3 + \sqrt{n}}{1 + \frac{2}{n}\sin n}.$$

Der Nenner ist beschränkt ($\forall n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{2}{n}\sin n \leq 3$), und damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\frac{2}{n} + \frac{5}{\sqrt{n}} + 3 + \sqrt{n}}{1 + \frac{2}{n}\sin n} \geq \frac{\frac{2}{n} + \frac{5}{\sqrt{n}} + 3 + \sqrt{n}}{3} \geq \frac{\sqrt{n}}{3},$$

weil die Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergiert gegeb ∞ divergiert auch die angegebene Folge bestimmt gegen ∞.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n\left(1 - \sqrt{1 - \frac{5}{n}}\right) = \frac{n \cdot (1 - (1 - \frac{5}{n}))}{1 + \sqrt{1 - \frac{5}{n}}} = \frac{5}{1 + \sqrt{1 - \frac{5}{n}}}.$$

Es ist $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{5}{n} = 1$, damit $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{n}} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} 1 + \sqrt{1 + \frac{5}{n}} = 2$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{1 + \sqrt{1 - \frac{5}{n}}} = \frac{5}{2}.$$

Aufgabe 3. (6 Punkte).

a) Wir berechnen für $n \in \mathbb{N}$ den Quotienten

$$\frac{\frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n^3+3n^2+1}{2^n}} = \frac{2+\frac{9}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^3}} =: q_n.$$

Weil $\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{2} < 1$ liefert die Grenzwertfassung des Quotientenkriteriums dass die Reihe konvergiert.

b) Die Folge $a_n := \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}$ ist eine Nullfolge. Sie ist ausserdem monoton, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{n+1}(n+1) \leq \sqrt{n}(n+2) \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)^3 \leq n(n+2)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1-n \leq n^2, \end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung ist richtig. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe also. Die Reihe konvergiert nicht absolut, denn für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist $a_{n-1} \geq \frac{1}{n}$, die harmonische Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ divergiert, und nach dem Minoranten-Kriterium divergiert also auch die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Aufgabe 4. (6 Punkte). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a,b] \to [a,b]$ sei stetig und differenzierbar auf (a,b) mit nicht-negativer Ableitung, d.h. für alle $\xi \in (a,b)$ sei $f'(\xi) \geq 0$. Außerdem sei $a_0 \in [a,b]$ gegeben und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = f(a_{n-1})$.

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$.
1. Fall: $a_n < a_{n+1}$, dann ist f stetig auf $[a_n, a_{n+1}]$ und differenzierbar auf (a_n, a_{n+1}). Es sei $\xi \in (a_n, a_{n+1})$ gegeben nach dem Mittelwertsatz, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(a_{n+1} - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}.$$

Multipliziert man die Gleichung mit $a_{n+1} - a_n$, so liefert das die angegebene Gleichung. Weil $(a_n, a_{n+1}) \subset (a,b)$ ist, liegt $\xi \in (a,b)$.
2. Fall: $a_n > a_{n+1}$, dann ist f stetig auf $[a_{n+1}, a_n]$ und differenzierbar auf (a_{n+1}, a_n). Es sei $\xi \in (a_n, a_{n+1}) \subset (a,b)$ wie oben gegeben nach dem Mittelwertsatz, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(a_n) - f(a_{n+1})}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}.$$

Multipliziert man die Gleichung mit $a_{n+1} - a_n$, so liefert das wieder die Behauptung.
3. Fall: $a_n = a_{n+1}$, dann ist für ein beliebiges $\xi \in (a,b)$ sowohl die rechte Seite der Gleichung, als auch deren linke Seite Null. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi \in (a,b)$ existiert so, dass

$$a_{n+2} - a_{n+1} = f'(\xi)(a_{n+1} - a_n).$$

b) Weil für jedes $\xi \in (a,b)$ gilt $f'(\xi) \geq 0$ liefert die Aussage aus a) dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $a_{n+1} \geq a_n$ so ist auch $a_{n+2} \geq a_{n+1}$, und ist $a_{n+1} \leq a_n$ so ist auch $a_{n+2} \leq a_{n+1}$. Mit dem Induktionsprinzip folgt die Monotonie der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 5. (6 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = (1 + x + \frac{1}{2}x^2) \cdot e^{-x}$.

a) Weil f differenzierbar ist, lässt sich die Monotonie am Vorzeichen der Ableitung erkennen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f'(x) = (1 + x)e^{-x} - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)e^{-1} = -\frac{1}{2}x^2.$$

Die Ableitung ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ grösser oder gleich Null, d.h., f ist monoton fallend, und für $x \neq 0$ ist $f'(x) < 0$, d.h. f ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Wir berechnen die Grenzwerte der Funktion f an den Rändern des Definitionsgebietes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2}{e^x} = \infty \quad \text{(der Zähler geht gegen Unendlich, der Nenner gegen Null),}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{(zweimaliges Anwenden der Regeln von l'Hopital)}$$

Die Stetigkeit von f garantiert, dass $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, d.h. jedes $C \in (0, \infty)$ liegt im Bildbereich von f (d.h. für jedes $C > 0$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = C$).

Ausserdem ist f streng monoton und damit injektiv in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen $f(0) = 1 \neq f(x)$ für $x \neq 0$ ist f sogar in ganz $\mathbb{R}$ injektiv.

Also ist die Lösung x der Gleichung $f(x) = C$ eindeutig.

c) Es ist $f(0) = 1$, wegen der Eindeutigkeit der Lösung (vgl. b)) ist $x = 0$ die einzige Lösung.

d) Es ist $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
Wegen $\lim_{x\to1} f^{-1}(x) = 0$ und $\lim_{x\to0} f'(x) = 0$ (wobei $f'(x) < 0$ für $x \neq 0$) und der Stetgkeit von f' und f^{-1} ist $\lim_{x\to1}(f^{-1})'(x) = -\infty$. Das ist aber genaugenommen keine Ableitung im Sinne der Vorlesung: f^{-1} is im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar, weil der obige Grenzwert nicht in $\mathbb{R}$ (d.h. endlich) ist.

Aufgabe 6. (6 Punkte). Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Grenzwerte,

a)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = \lim_{x\to\pi} 1 - \cos x = 2.$$

(oder mit l'Hopital.)

b) Weil $\lim_{x\to1} x - 1 = 0$ und $\lim_{x\to1} x^n - 1 = 0$ kann man l'Hopital anwenden:

$$\lim_{x\to1} \frac{x - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to1} \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 7. (4 Punkte). Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\cos(2x)e^x + \sin(2x)e^x = 2\cos(2x)e^x + f(x), & f'(0) &= 2,\\
f''(x) &= -4\sin(2x)e^x + 2\cos(2x)e^x + f'(x) = 4\cos(2x)e^x - 3f(x), & f''(0) &= 4,\\
f'''(x) &= -8\sin(2x)e^x + 4\cos(2x)e^x - 3f'(x), & f'''(0) &= 4 - 3 * 2 = -2,
\end{aligned}$$

Damit ist

$$T_3(f,0)(x) = 0 + 2x + \frac{4}{2}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 = 2x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$$