Aufgabe 3.1. (6 Punkte) Seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Beweisen Sie dass aus $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ folgt

$$\lim_{n\to+\infty} \max(a_n, b_n) = \max(a, b).$$

Geben sie ein Beispiel wo die Folge $c_n := min(a_n, b_n)$ einen Grenzwert hat aber weder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind.

Aufgabe 3.2. (6 Punkte) Berechnen Sie:

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k \sin(n!)}{\sqrt{n+1}},\ \text{für } k = \frac{1}{3} \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)! + (-1)^n (n-1)!}{(n+4)!}.$$

Zeigen Sie lediglich durch Anwendung der Definition des Limes:

$$c)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\max(n^2 - 10n, n)} = 0 \qquad d)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\min(n^2 - 10n, n)} = 1$$

Aufgabe 3.3. (6 Punkte) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie ihre Aussage.

- Für jede uneigentlich konvergente Folge (auch bestimmt divergente Folge gennant) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{(-1)^n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- Für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine uneigentlich konvergente Folge.

Aufgabe 3.4. (6 Punkte) Seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Beweisen Sie dass

- aus $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ folgt
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = a - b.$$
- aus $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ folgt
$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |a|.$$