Letzte Editierung:	14. März 2011
Editoren:	Tom Streubel, Frank Winkler, Lutz Lehmann
Nach Mitschriften von:	Nguyễn Thị Hà, Tom Streubel, Adrian Ebert, Matthias A. Bendlin, u.a.

Analysis I* 2010/11
Professor Ph.D. A. Griewank, Dr. L. Lehmann

Inhaltsverzeichnis

I Grundlegende Begriffe

§1 Logik und Mengenlehre

Bemerkung Das Ziel der Aussagenlogik ist der verbale Ausdruck von logischen Zusammenhängen. Dazu werden als wahr angenommene Grundaussagen (sog. Axiome) und Formelsymbole mit definierten Eigenschaften verwendet.

Definition 1.1

- ***Aussagen*** *sind sprachliche Gebilde, die entweder wahr oder falsch, aber nicht beides sein können. Diese Eigenschaft wird auch tertium non datur genannt.*
- ***Junktoren*** *bzw. auch Konnektoren verknüpfen Aussagen zu komplexeren Aussagen. Die wichtigsten Junktoren sind:*

Junktor	*Bezeichnung*	*verbaler Ausdruck*
$\neg$	*Negation*	*negiert bzw. nicht*
$\wedge$	*Konjunktion*	*und*
$\vee$	*Disjunktion*	*oder*
$\Leftarrow \setminus \Rightarrow$	*Implikation*	*daraus folgt bzw. wenn, dann*
$\Longleftrightarrow$	*Äquivalenz bzw. Biimplikation*	*genau dann, wenn*

- ***Aussagenlogik*** *beschäftigt sich mit allgemeinen Prinzipien des korrekten Argumentierens und Schlussfolgern von Aussagen und deren Kombinationen.*

Bemerkung Mit Hilfe der Junktoren $\neg$ und $\Rightarrow$ können die anderen Junktoren dargestellt werden. Genauso können beliebige andere Junktoren mithilfe der gegebenen definiert werden. Zum Beispiel das „Ausschließendes Oder“ bzw. auch Kontravalenz:

$$x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$$

Beispiel Sei A eine Aussage und x, y, z boolesche Variablen (d.h., entweder 0 oder 1) und es sei folgende Vorschrift gegeben:

$$A \Longleftrightarrow \Big[((x \wedge y) \vee y) \Longleftrightarrow (x \wedge \neg z) \Big]$$

Die Aussage A trifft genau dann zu, wenn die Auswertung der rechten Seite (RHS = right hand side) für eine gewählte Wahrheitsbelegung von x,y und z eine 1 ergibt. Zur Auswertung werden Wahrheitstafeln betrachtet, die für die elementaren Junktoren wie folgt gegeben sind:

x	$\neg x$
0	1
1	0

Negation

$x \backslash y$	1	0
1	1	0
0	0	0

Konjunktion

$x \backslash y$	1	0
1	1	1
0	1	0

Disjunktion

$x \backslash y$	1	0
1	0	1
0	1	0

Kontravalenz

$x \backslash y$	1	0
1	1	0
0	1	1

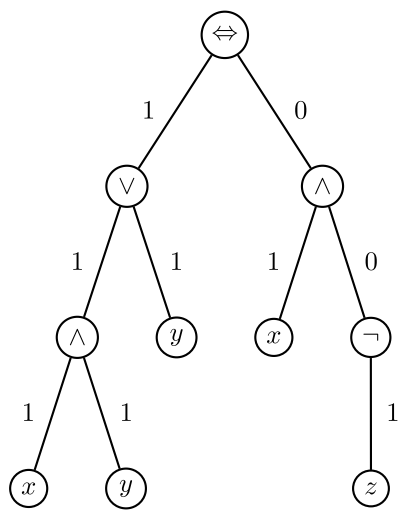
Implikation $\Rightarrow$

$x \backslash y$	1	0
1	1	0
0	0	1

Biimplikation

Somit ergibt sich für unsere Aussage aus dem Beispiel die folgende Wahrheitstafel:

x :	1	1	1	1	0	0	0	0
y :	1	1	0	0	1	1	0	0
z :	1	0	1	0	1	0	1	0
A :	0	1	0	1	0	0	1	1



Desweiteren können Aussagen in einem Formelbaum aufgeschlüsselt werden. Die Abbildung schematisiert die Beispielformel und ist mit den Wahrheitswerten für die boolesche Belegung des Tripels $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ gekennzeichnet.

Satz 1.2 (Satz der logischen Äquivalenzen)

(i) $x \wedge 1 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x \vee 0, x \wedge 0 \Leftrightarrow 0, x \vee 1 \Leftrightarrow 1$

(ii) $x \wedge x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x \vee x$ *Idempotenz*

(iii) $x \wedge y \Leftrightarrow y \wedge x$, $x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$ *Kommutativität*

(iv) $(x \wedge y) \wedge z \Leftrightarrow x \wedge (y \wedge z)$, $(x \vee y) \vee z \Leftrightarrow x \vee (y \vee z)$ *Assoziativität*

(v) $(x \wedge y) \vee z \Leftrightarrow (x \vee z) \wedge (y \vee z)$, $(x \vee y) \wedge z \Leftrightarrow (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *Distributivität*

(vi) $(\neg(\neg x)) \Leftrightarrow x$, $x \vee (\neg x) \Leftrightarrow 1$

(vii) *De Morgansche Regeln*

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

Beweis: Alle diese Äquivalenzen können mithilfe der Wahrheitstafeln leicht gezeigt werden. □

§2 Mengen, Aussageformen und Quantoren

Den Begriff **Menge** zu erklären ist Teil mathematischer Grundlagenforschung und äußerst schwierig. Entsprechend wird er hier nicht formal definiert. Mengen sind zu verstehen als Sammlungen von Objekten.

Mit der Schreibweise $a \in M$ soll verdeutlicht werden, dass ein Objekt a ein Element der Menge M ist oder einfach nur, dass a in M enthalten ist. Als Mengensymbole kann wie üblich jedes mögliche Symbol benutzt werden. Üblich sind oft große lateinische Buchstaben wie M, N, X und andere.

Mengen können auch selbst als Objekte verstanden werden und somit Elemente in einer Menge sein, die dann oft Familie genannt wird. Ein großer Teil der Mathematik und auch die moderne Mengenlehre basiert auf dem **Zermelo-Fränkel-Axiomensystem**.

Bemerkung Vorstellung der sog. Mengenhierarchie in aufsteigenden Stufen

(i) Objekte einer Grundgesamtheit

(ii) Teilmengen der Grundgesamtheit

(iii) Mengenfamilien, Potenzmenge

(iv) kartesische Produkte

Definition 2.1 (Aussageformen oder auch logische Formeln)
Aussageformen sind Aussagen mit belegbaren Platzhaltern, die freie Variablen genannt werden.

Bemerkung Solche Aussageformen können aufgrund der Unbestimmtheit der freien Variable nicht generell mit wahr oder falsch belegt werden. Zuerst wird eine Grundmenge oder Grundgesamtheit angenommen (z.b. die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$) und dann können für bestimmte Elemente der Grundmenge die Gültigkeit der Aussageform, in Abhängigkeit von diesen Elementen, geprüft werden.

Beispiel Es sei die Aussageform $A(x)$: ≫x ist eine Primzahl≪

Wird als Grundgesamtheit nun ≫Käsesorten≪ gewählt, dann ist eine Aussage wie
$A(\text{Cheddar})$: ≫Cheddar ist eine Primzahl≪ noch nicht einmal falsch.

Wird jedoch als Grundmenge die Menge der ≫rationalen Zahlen≪ gewählt, dann ist
$A(3/4)$: ≫3/4 ist eine Primzahl≪ eher verständlich, aber dieses mal wirklich falsch.

Für die Zahl 7 der ≫natürlichen Zahlen≪ ist die Aussage $A(7)$: ≫7 ist eine Primzahl≪ endlich korrekt.

Bemerkung Symbole wie $\forall$ und $\exists$ werden als **Quantoren** bezeichnet. Ihr Zweck ist es freie Variablen wieder zu binden.

- Der Allquantor $\forall x : A(x)$. *lies:* Für alle x gilt $A(x)$.
- Der Existenzquantor $\exists x : A(x)$. *lies:* Für (mindestens) ein x gilt $A(x)$.

Quantorennegation:

$\neg\forall x : E(x) \iff \exists x : \neg E(x)$ Nicht für alle x **ist äquivalent zu** es existiert ein x, sodass nicht
$\neg\exists x : E(x) \iff \forall x : \neg E(x)$ Es existiert kein x **ist äquivalent zu** für jedes x gilt nicht

Einbeziehung der Grundmenge:

$\forall x \in M : A(x) \iff \forall x : x \in M \to A(x)$ Für jedes x, dass in M enthalten ist, folgt $A(x)$ ist wahr.
$\exists x \in M : A(x) \iff \exists x : x \in M \wedge A(x)$ Es existiert oder existieren x, aus M, sodass $A(x)$ wahr ist.

Beispiel Mögliche Definitionen für Mengenrelationen und -operationen, mittels Quantoren.
Es seien Mengen A, B, G, X, Y und Elemente a, b, x, y gegeben.

Gleichheit	$\forall X, Y : X = Y \overset{Df}{\iff} (\forall a : a \in X \leftrightarrow a \in Y)$
Teilmenge	$\forall X, Y : X \subset Y \overset{Df}{\iff} (\forall a : a \in X \to a \in Y)$
Folgerung:	$\forall X, Y : X = Y \iff (X \subset Y \wedge Y \subset X)$
Vereinigung	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Durchschnitt	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Differenz	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge \neg x \in B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Komplement	$A^c = \{x \mid \neg x \in A\}$

Komplementbildung kann immer nur bzgl. einer Grundgesamtheit G geschehen, sonst gibt es Antinomien und Paradoxa. So dass eigentlich:

	$A^c = \{x \in G \mid \neg x \in A\} = G \setminus A$
Potenzmenge	$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$
kartesisches Produkt	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ siehe unten

Bemerkung Teilmengen von Grundmengen X sind austauschbar zu Aussageformen:
Sei $U \subset X$, dann ist $T(x) = x \in U$ eine Aussageform. Ist $T(x)$ hingegen eine Aussageform über x, dann gibt es eine Teilmenge $A(x) = \{x \in X \mid T(x)\}$, so dass $x \in A \iff T(x)$.

§3 Relationen und Funktionen

Ein *geordnetes Paar* ist eine Struktur (a, b) aus zwei Objekten mit ausgezeichneter Reihenfolge, d.h. $(a, b) = (c, d)$ genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$.

Bemerkung Das *kartesische Produkt* zweier Mengen ist die Menge aller geordneten Paare

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

Definition 3.1
Eine Relation auf X ist eine Teilmenge R von $X \times X$. $(x, y) \in R$ wird auch als xRy geschrieben. (z.B. ist $\leq$ eine Relation auf $\mathbb{R}$)

$R \subset X \times X$ heißt

(i) reflexiv $\iff \Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset R \iff \forall x : xRx$

(ii) symmetrisch $\iff \forall x, y \in X : xRy \leftrightarrow yRx$

(iii) antisymmetrisch $\iff \forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \to x = y$

(iv) transitiv $\iff \forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \to xRz$

Definition 3.2
Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Grundmenge X zerfällt dann in Äquivalenzklassen $[x] = \{y \in X \mid xRy\}$.

Beispiel Die Gleichheit „=“ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel Division mit Rest definiert eine Äquivalenzrelation „$\equiv_m$“. Es seien $a = q_1 m + r_1$, $b = q_2 m + r_2$, $0 \leq r_k < m$ gegeben, dann ist $a \equiv_m b$ oder $a \equiv b \mod m$, genau dann, wenn $r_1 = r_2$. Dies ist gleichwertig zur Schreibweise $m \mid (b - a)$.

Definition 3.3
Eine Halbordnung *auf einer Menge X ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation, oft als $\leq$ oder $\preceq$ notiert.*
Eine (totale) Ordnung *ist eine Halbordnung $\leq$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass alle Elemente untereinander vergleichbar sind,*

$$\forall x, y \in X : x \leq y \vee y \leq x$$

Eine Wohlordnung ist eine Ordnung, in der jede nichtleere Teilmenge ein minimales Element enthält,

$$\forall A \subset X : A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \in A \forall y \in A : x \leq y$$

Die strikte Ordnung $<$ *zu einer Ordnung $\leq$ ist definiert als*

$$\forall x, y \in X : x < y \Longleftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

Beispiel $\leq$ ist eine Ordnung in $\mathbb{N}$, aber auf $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$$(a, b) \leq (c, d) \overset{Df}{\Longleftrightarrow} a \leq c \wedge b \leq d$$

ist es nur eine Halbordnung, da $(2, 3) \leq (4, 5)$, aber $(3, 5)$ und $(7, 3)$ nicht vergleichbar sind.

Beispiel Die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definiert durch

$$(a, b) \leq (c, d) \overset{Df}{\Longleftrightarrow} a \leq c \vee (a = c \wedge b \leq d)$$

ist eine Ordnung. $(2, 3) \leq (4, 5)$, $(3, 4) \leq (3, 7)$

Diese ist sogar eine Wohlordnung.

Definition 3.4
Eine Funktion *ist ein Tripel (f, X, Y), notiert als $f : X \to Y$, wobei f eine Teilmenge des kartesischen Produktes $f \subset X \times Y$ ist, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet,*

$$\begin{aligned} \forall x \in X \exists y \in Y :& (x, y) \in f \\ \forall x \in X, y, \tilde{y} \in Y :& (x, y) \in f \wedge (x, \tilde{y}) \in f \to y = \tilde{y} \end{aligned}$$

$(x, y) \in f$ wird als $y = f(x)$ geschrieben.

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

(i) injektiv *oder* eineindeutig, *wenn aus $f(x) = f(\tilde{x})$ schon $x = \tilde{x}$ folgt;*

(ii) surjektiv *oder* Abbildung auf, *wenn zu jedem $y \in Y$ ein Element $x \in X$ im Urbild mit $y = f(x)$ existiert;*

(iii) bijektiv, *wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

Allgemein ist das Bild *von A unter f, für $A \subset X$, definiert als eine Menge:*

$$f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) | x \in A\}$$

Analog ist das Bild *von f definiert als eine Menge:*

$$\operatorname{im}(f) = f(X) = \{f(x) \in Y | x \in X\} \subseteq Y$$

Die Urbildfunktion *einer Funktion f wird notiert mit $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ und ist definiert, für jede Teilmenge $B \subset Y$:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\} \subseteq X$$

Ist f bijektiv, dann kann man eine Umkehrfunktion *$f^{-1} : Y \to X$ definieren, $x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x)$.*

§4 Beweisprinzipien

Ausgehend von einer Theorie T und Voraussetzungen V ist eine Behauptung B zu zeigen, »Wenn V, dann B«

- direkter Beweis: $T \wedge V \Rightarrow B$
- indirekter Beweis: $T \wedge \neg B \Rightarrow \neg V$ (Kontraposition)
- Widerspruchsbeweis: $T \wedge V \wedge \neg B \Rightarrow F$
  bzw. in einer konkreten Ausführung mit einer Hilfsaussage H zeigt man $T \wedge B \Rightarrow H$ und $T \wedge B \wedge \neg V \Rightarrow \neg H$.
- Induktionsbeweise: vollständige Induktion über den natürlichen Zahlen bzw. allgemein Induktion über einer wohlgeordneten Menge. (a suivre)

§5 Natürliche Zahlen

Definition 5.1 (Peano-Axiome)
Das Tripel $(\mathbb{N}, 1, S)$ wird als natürliche Zahlen bezeichnet, falls folgende Axiome erfüllt sind:

- $1 \in \mathbb{N}$
- $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *bijektiv*
- $\forall U : \big(U \subset \mathbb{N} \wedge 1 \in U \wedge (n \in U \Rightarrow S(n) \in U)\big) \Longrightarrow U = \mathbb{N}$ [Induktionsaxiom]

Bemerkung Die natürlichen Zahlen werden durch dieses *Axiomensystem* definiert. Im Tripel haben wir ein ausgezeichnetes Element 1 und eine Funktion S, die *Nachfolgerfunktion* genannt wird. Es gibt verschiedene Möglichkeiten das Peano-Axiomensystem aufzuziehen. Es ist möglich das Peano-Axiomensystem mit bis zu 23 Axiomen zu definieren. Dabei wird schon beim Aufstellen der Axiome die Addition festgelegt. Mit der definierten Addition hätte $S(n)$ die Form $S(n) = n + 1$. Jedoch in der obigen Definition wird darauf verzichtet die Addition zu definieren, denn dann kann diese genau anders herum über die Nachfolgerfunktion definiert werden. Jede natürliche Zahl ergibt sich mittels endlicher Anwendung dieser Nachfolgerfunktion [so z.B. $3 = S(S(1))$].

Es gibt verschiedene Konventionen und Ansichten dazu, ob die 0 in der Menge der natürlichen Zahlen enthalten ist oder nicht. In diesem Skript wird die 0 nicht als Element der natürlichen Zahlen angesehen. Jede Struktur (N, e, s), die diese Eigenschaften hat, ist zu $(\mathbb{N}, 1, S)$ isomorph, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{N} \to N$ mit $F(1) = e$ und $F(S(n)) = s(F(n))$.

Beispiel $(0 = \emptyset)$, $S(n) = n \cup \{n\}$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = S(1) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \dots$

Lemma 5.2
Es gibt genau eine Additionsfunktion $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $A(n, 1) = S(n)$ und $A(n, S(m)) = S(A(n, m))$.

Notation $A(m, n) = m + n$.

Diese ist

(i) assoziativ: $\forall k, m, n :\ A(A(k, m), n) = A(k, A(m, n))$ bzw. $(k + m) + n = k + (m + n)$ und

(ii) kommutativ: $\forall m, n :\ A(m, n) = A(n, m)$ bzw. $m + n = n + m$.

§6 Vollständige Induktion

Satz 6.1
Sei $A(n)$ eine Aussageform über $\mathbb{N}$. Wenn der Induktionsanfang $A(1)$ und der Induktionsschritt $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n + 1))$ erfüllt sind, dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

> **Beweis:** Sei $U = \{n \in \mathbb{N} | A(n)\}$. Dann gelten $1 \in U$ und $\forall n \in \mathbb{N} : n \in U \Rightarrow S(n) = n + 1 \in U$. Nach dem Induktionsaxiom muss dann $U = \mathbb{N}$ gelten und damit $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$. □

Beispiel (Bernoulli-Ungleichung) Sei eine reelle Zahl $h > -1$ fixiert. Dann gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) : \quad (1 + h)^n \geq 1 + nh$$

Beweis: Beweis durch vollständige Induktion (über n):

$A(1)$**:** $(1+h)^1 \geq 1 + 1 \cdot h$.

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$**:**

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)(1+h)^n \\ &\overset{A(n)}{=} (1+h)(1+nh) = 1 + h + nh + \underbrace{nh^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)h\end{aligned}$$

Satz 6.2 (allgemeine Induktion)
Sei $(X, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge und $A(x)$ eine Aussageform über X.

$$\Big[\forall x \in X : \big(\forall y \in X : y < x \to A(y)\big)\Big] \Longrightarrow \big[\forall x \in X : A(x)\big]$$

M.a.W: Gilt für jedes $x \in X$, dass aus $A(y)$ für alle Vorgänger $y < x$ schon $A(x)$ folgen muss, so gilt $A(x)$ konditionslos schon für jedes $x \in X$.

Beweis: Sei $U = \{x \in X | \neg A(x)\}$. Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

(i) Wenn $U = \emptyset$, dann gilt die Aussage.

(ii) Sonst hat U nach dem Wohlordnungsaxiom ein minimales Element x. Nach Konstruktion von U gilt aber dann $A(y)$ für alle $y < x$ und damit (auch wenn es gar keinen Vorgänger $y < x$ gibt) nach Voraussetzung $A(x)$. Also kann es kein solches x geben, $U = \emptyset$ und $\forall x \in X : A(x)$. □

II Reelle Zahlen

§1 Zahlbereiche

Die grundlegende Zahlenbereichshierachie lautet

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} (\subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O})$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{H}$ die sogenannten Quaternionen oder Hamiltonzahlen und $\mathbb{O}$ die sogenannten Oktonionen.

Motivation für $\mathbb{Z}$, die ganzen Zahlen
Problem: Die Gleichung $a + x = b$ mit $(a,b) \in \mathbb{N}_0^2$ ist nicht immer nach $x \in \mathbb{N}_0$ auflösbar.

Lösung: ersetze a, b durch $(0,a)$ und $(0,b)$ und setze $x = (a,b)$. Unter gliedweiser Addition gilt dann

$$(0,a) + (a,b) = (a, a+b) \sim (0,b)$$

unter der Äquivalenzrelation $(c,d) \sim (x,y) \Longleftrightarrow c + y = d + x$.

Somit ergibt sich die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, k, -k, \ldots\}$ mit $n = +n = [(0,n)]$ und $-n = [(n,0)]$

Motivation für $\mathbb{Q}$, die rationalen Zahlen
Problem: Nun ist allerdings wiederum die Gleichung $ax = b$ mit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $a \neq 0$ nicht immer in $x \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Lösung: Paare (a,b), notiert als $b/a = \frac{b}{a}$ mit Äquivalenzrelation $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow ad = cb$

Somit erhalten wir die Menge der rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ teilerfremd} \right\}$$

Motivation für $\mathbb{R}$, die reellen Zahlen
Problem: Nullstellen von Polynomen mit ganzen oder rationalen Koeffizienten, Werte und Nullstellen von transzendenten Funktionen sin, exp, etc.

Lösung: Dedekindschnitte, Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen bzw. Intervallschachtelungen

Motivation für $\mathbb{C}$, die komplexen Zahlen
Problem: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ (und andere) hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

Lösung: In $\mathbb{R}^2$ ist die Multiplikation mit -1 die Punktspiegelung am Ursprung und auch eine Drehung um $180^o = 2 \cdot 90^o$. Definiere $\mathbf{i}$ als Drehung von $1 = (1, 0)$ um 90^o, also $\mathbf{i} = (0, 1)$. Definiere Multiplikation so, dass sie mit Drehungen kompatibel ist, insb. also $\mathbf{i}^2 = -1$. Die komplexen Zahlen sind dann

$$\mathbb{C} = \left\{x + \mathbf{i}y \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} , \quad \text{z.B. als Drehstreckung} \quad x + \mathbf{i}y = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Bemerkung Das Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt Menge der irrationalen Zahlen, die sich weiter aufteilen in die Menge der irrationalen algebraischen und die Menge der transzendenten Zahlen.

Algebraische Zahlen sind Nullstellen von Polynomen mit rationalen beziehungsweise ganzen Koeffizienten. Rechenoperationen mit ihnen sind rein arithmetisch ausführbar. Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mit irrationalen Zahlen ist das ureigene Anliegen der Analysis. Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ ist wieder rein algebraisch.

§2 Die Körperaxiome

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bilden jeweils einen Körper $\mathbb{K}$, in dem eine Addition und Multiplikation definiert sind, bzgl. derer die Axiome einer abelschen Gruppe gelten und die per Distributivgesetz verbunden sind:

Für die additive Verknüpfung $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, notiert als $+(x, y) =: x + y$, gelten die Axiome der abelschen Gruppe $(\mathbb{K}, +, 0)$:

I.1. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} :\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität)

I.2. $\forall\, x, y\ \in \mathbb{K} : x + y = y + x$ (Kommutativität)

I.3. $\exists\, 0 \in\ \mathbb{K} :\ \forall\, x \in \mathbb{K} : x + 0 = x$ (Existenz des Nullelementes, des neutralen Elementes der Addition)

I.4. $\forall\, x \in \mathbb{K}\ \exists\, y \in \mathbb{K} :\ x + y = 0$, notiere y als $= -x$ (negatives Element, inverses Element der Addition)

Für die multiplikative Verknüpfung $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, notiert als $\cdot(x, y) =: xy$, gelten die Axiome der abelschen Gruppe $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$:

II.1. $\forall x, y, z \in \mathbb{K} :\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)

II.2. $\forall x, y \in \mathbb{K} :\ x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)

II.3. $\exists 1 \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K} :\ x \cdot 1 = x$ (Einselement, neutrales Element der Multiplikation)

II.4. $\forall 0 \neq x \in \mathbb{K}\ \exists y \in \mathbb{K} :\ xy = 1$, notiere y als $x^{-1} = \frac{1}{x}$ (inverses Element der Multiplikation)

Beide Abbildungen sind verknüpft durch folgendes Axiom:

III.1. $\forall x, y, z \in \mathbb{K} :\ (x + y) \cdot z = xz + yz$ (Distributivgesetz)

Bemerkung Eine Struktur, die alle Körperaxiome erfüllt, bis auf II.2., II.3. und II.4., heißt Ring. In $\mathbb{Z}$ gelten all diese Axiome mit Ausnahme von II.4. Eine solche Struktur heißt auch kommutativer Ring mit 1. $\mathbb{N}$ verletzt außerdem noch I.3. und I.4., eine solche Struktur nennt man Halbring oder Semi–Ring.

Satz 2.1 (Folgen aus den Körperaxiomen)
Aus den Körperaxiomen folgt:

(i) Die Eindeutigkeit der 0, des neutralen Elementes der Addition, die Eindeutigkeit der 1, dem neutralen Element der Multiplikation.

(ii) *Daraus folgt wiederum die Eindeutigkeit des Negativen und der Differenz* $y - x := y + (-x)$, $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, *sowie des Kehrwertes und des Quotienten* $\frac{y}{x} := yx^{-1}$, $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $x \neq 0$.

(iii) *Somit wiederum ergibt sich die eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungen* $a + bx = c$.

Beweis: (i) Angenommen, 0 und $0'$ sind neutrale Elemente bezüglich der Addition, dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}$ sowohl $0 + x = x$, als auch $0' + x = x$. Daher

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

Die Eindeutigkeit der 1 als neutrales Elementes der Multiplikation folgt analog.

(ii) Analog folgt für zwei negative zu x, d.h. $x + y = 0 = x + y'$

$$y = 0 + y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + x' = (x + y) + y' = 0 + y' = y'$$

(iii) Wegen $b \neq 0$ ist $x = \frac{(c-a)}{b}$ wohldefiniert. Einsetzen von x in die Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} a + b[(c-a)b^{-1}] &= a + [(c-a)b]b^{-1} = a + (c-a)(b \cdot b^{-1}) \\ &= a + (c-a) = a + c - a = a - a + c = c \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x$ ist tatsächlich Lösung.

Eindeutigkeit: Sei $a + b\tilde{x} = c$ für $\tilde{x} \in \mathbb{K}$: $\Longrightarrow (a + b\tilde{x}) = (a + bx) \Longleftrightarrow b\tilde{x} = bx \Longleftrightarrow \tilde{x} = x$ □

Definition 2.2 (Unterstruktur)
Eine Teilmenge $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ *eines Ringes ist genau dann selbst ein Ring bezüglich der in* $\mathbb{K}$ *definierten binären und unären Operationen, falls* $\mathbb{K}'$ *algebraisch abgeschlossen ist, das heißt:* $\forall x, y \in \mathbb{K}' : x + y, x \cdot y \in \mathbb{K}'$.

Mit anderen Worten: Die Operationen dürfen nicht aus der Teilmenge herausführen. Ist $\mathbb{K}$ *sogar ein Körper und die Teilmenge auch über die Kehrwertbildung abgeschlossen, dann ist die Teilmenge auch ein Teilkörper.*

Beispiel Der Körper $\mathbb{K}' = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Teil von $\mathbb{R}$ und ein Erweiterung von $\mathbb{Q}$, das heißt $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{K}' \subsetneq \mathbb{R}$.

Frage Warum ist $\mathbb{K}' \neq \mathbb{Q}$.

Antwort Weil $\sqrt{2}$ irrational ist, das heißt die äquivalenten Bedingungen $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Longleftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Longleftrightarrow m^2 = 2n^2$ für $m, n \in \mathbb{N}$ nicht erfüllbar.

Beweis: Annahme, es gibt ein geeignetes Paar $m, n \in \mathbb{N}$. O.B.d.A. gilt dann: m, n sind nicht beide gerade, sonst wird gekürzt. Da wiederum $m^2 = 2n^2$ gerade ist, kann m nicht ungerade sein. Somit folgt, dass n ungerade sein muss. Da aber gilt, dass $n^2 = \frac{m^2}{2} = m\frac{m}{2}$, folgt, dass n gerade ist. Somit haben wir einen Widerspruch und es kann kein geeignetes Paar m, n aus $\mathbb{N}$ geben, welches $\sqrt{2}$ ergibt. □

Satz 2.3 (Rechenregeln in einem Körper)
Für beliebige $x, y \in \mathbb{K}$ *gilt:*

(i) $(-(-x)) = x$ *und* $((x^{-1})^{-1}) = x$ *wenn* $x \neq 0$

(ii) $x \cdot y = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ [Nullteilerfreiheit]

(iii) $(-x)y = -(xy)$

(iv) $-(x + y) = -x - y$ *und* $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ *für* $x \neq 0 \neq y$

Beweis: (ii) " $\Longleftarrow$ ": Das heißt, wir beweisen die Implikation von rechts nach links.

O.B.d.A. : Sei $x = 0 \Longrightarrow xy = 0y = (0 + 0)y = 0y + 0y \Longrightarrow 0y = 0y + 0y \Longrightarrow 0 = 0y$.

„$\Longrightarrow$“: Falls $x = 0$ ist nichts zu beweisen. Sonst existiert x^{-1}, so dass $0 = xy \Longrightarrow x^{-1}0 = 0 = x^{-1}xy = y$ $\Longrightarrow y = 0$ wie behauptet. □

Zusammenfassung Alle aus der Schule bekannten Rechenregeln lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten und gelten insbesondere in $\mathbb{R}$ und allen Teilkörpern $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Bemerkung Die Grundrechenarten sind alle jeweils binäre Operationen, das heißt, dass sie jeweils zwei Argumente zu einem Körperelement verknüpfen. Demgegenüber sind $-x$ und x^{-1} unäre Operationen, das heißt, sie werden jeweils auf ein Element angewendet. Das Minuszeichen kann somit sowohl eine unäre, wie auch binäre Operation darstellen. Das unäre Pluszeichen ist trivial und wird meist weggelassen.

Schlussfolgerung aus den Körperaxiomen Verallgemeinerung von Assoziativität, Kommutativität, Distributivität auf endliche Summen und Produkte, sowie deren Verknüpfungen.

Definition 2.4 (Notation für Tupel, Summen, Produkt)
Für ein (geordnetes) Tupel von n Zahlen schreibt man $(a_j)_{j=1}^n = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Für Addition und Multiplikation über alle Elemente eines Tupels schreibt man:

$$\sum_{j=1}^{0} a_j := 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = (\ldots((a_1 + a_2) + a_3) + \ldots) + a_n := \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j\right) + a_n$$

$$\prod_{j=1}^{0} a_j := 1$$

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = (\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \ldots) \cdot a_n := \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j\right) \cdot a_n$$

Beispiel (Die Fakultät)

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = (n-1)! \cdot n$$

Beispiel (Potenznotation)

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n-mal} = \prod_{j=1}^{n} x \Longrightarrow x^0 = 1$$

Bemerkung Es kann nun induktiv „bewiesen“ werden, dass das Produkt bzw. die Summe der Zahlen $(a_j)_{j=1}^n$ wohldefiniert sind.

Lemma 2.5

(i) Die Summe und das Produkt sind assoziativ*, im folgenden Sinne: Sei* $1 \leq n' \leq n$*, dann*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n'} a_i + \sum_{i=1}^{n-n'} a_{i+n'} = \sum_{i=1}^{n'} a_i + \sum_{i=n'+1}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n'} a_i + \prod_{i=1}^{n-n'} a_{i+n'} = \prod_{i=1}^{n'} a_i + \prod_{i=n'+1}^{n} a_i$$

(ii) Für $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ *eine Permutation gilt:* $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}$ *und* $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}$
M.a.W. Der Wert einer Summe oder eines Produktes in einem Körper ist unabhängig von der Reihenfolge der Elemente.

Beweis: Der Beweis von (ii) kann einfach über die Kommutativität in einem Körper $\mathbb{K}$ geführt werden. Soll ein Term a_m, mit $1 < m \leq n$, an eine neue Position vor einen anderen Term, mit einem Index $1 \leq i < m$, getauscht werden:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j &= a_1 + a_2 + \cdots + (a_{m-1} + a_m) + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-2} + \underbrace{(a_m + a_{m-1})}_{\text{wegen Kommutativität: } a_{m-1} + a_m = a_m + a_{m-1}} + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-3} + (a_m + a_{m-2}) + a_{m-1} + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n = \cdots = \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + (a_m + a_i) + a_{i+1} + \cdots + a_{m-1} + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n\end{aligned}$$

Nun könnten die Terme $\{a_k\}_{j=1}^{n}$ neu durchnummeriert werden um einen fortlaufenden Index zu gewährleisten. Nach dem selben Schema kann auch ein Term a_m, mit $1 \leq m < n$, an eine neue Position hinter einen anderen Term, mit einem Index $m < i \leq n$, getauscht werden. Dieser *Tauschvorgang* kann nacheinander mit beliebig vielen der Termen durchgeführt werden. □

Lemma 2.6 (Verallgemeinerte Distributivität)
Für jedes $b \in \mathbb{K}$ *und* $(a_j)_{j=1}^{n} \in \mathbb{K}^n$ *gilt:*

$$b \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (b a_j)$$

Dabei kann das Argument der Summe ein beliebiger Ausdruck sein, der nicht unbedingt vom Laufindex abhängen muss, wie zum Beispiel:

$$b \sum_{j=1}^{n} 1 = nb$$

Beweis: Beweis durch Induktion über den Laufindex n.

(i) *Induktionsanfang:* $n = 1$:

$$b \cdot \sum_{j=1}^{1} a_j = b \cdot a_1 = \sum_{j=1}^{1} (b \cdot a_j)$$

(ii) Induktionsschritt: $m = n - 1 \Rightarrow n$:

$$b \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) = b \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \right) + a_n \right) = b \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \right) + b \cdot a_n \overset{IV}{=} \sum_{j=1}^{n-1} (b \cdot a_j) + (b \cdot a_n) = \sum_{j=1}^{n} (b \cdot a_j)$$

Damit ist alles gezeigt. □

Für ein zweites Zahlentupel $(b_i)_{i=1}^{m} \in \mathbb{K}^m$ folgt somit:

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} b_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)}_{1.)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=1}^{m} b_i \right) \cdot a_j \right)}_{2.)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (b_i \cdot a_j)}_{3.)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \left(b_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) \right)}_{4.)}$$

Frage Wieviele Operationen brauche ich, um diesen Ausdruck in verschiedenen Formen auszuwerten?

	1.)	2.)	3.)	4.)
Additionen:	$(m + n - 2)$	$(m - 1) + (n - 1)$	$mn - 1$	$m + n - 2$
Multiplikationen:	1	n	mn	m

Fazit Im Allgemeinen lohnt es sich, gemeinsame Faktoren aus Summen herauszuziehen, um die Anzahl der binären Operationen zu reduzieren.

Definition 2.7 (Binomialkoeffizient)
Der Binomialkoeffizienten für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) = \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

und lässt sich verallgemeinern für $n \in \mathbb{Z}$ oder sogar $n \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.8 (Eigenschaften des Binomialkoeffizienten)
Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

(i) $\binom{n}{k} \neq 0 \iff 0 \leq k \leq n \implies \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, *für* $1 \leq k \leq n$

Beweis: (ii) Beweis von ii.) unter Nutzung von i.). Fallunterscheidung:

(a) $n = k : \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$

(b) $n > k$:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Satz 2.9 (Binomialsatz)
Für $x, y \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

Beweis:

- Induktionsanfang $n = 1$:

$$(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{0}{0} x^0 y^1$$

- Induktionsschritt $n - 1 \Rightarrow n$:

$$\begin{aligned}(x+y)^n = (x+y)^{n-1} \cdot (x+y) &\overset{IV}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} \cdot x^k y^{n-k-1} \right] (x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \binom{n-1}{n-1} x^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} y^n \\ &= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} + \binom{n-k}{k} x^k y^{n-k} \right] + y^n \\ &= \binom{n}{n} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{0} y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

§3 Anordnung, Absolutbetrag, Minimum und Maximum

Im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ lässt sich $\mathbb{R}$ und jeder Teilkörper von $\mathbb{R}$ linear auf der „Zahlengeraden“ anordnen.

Definition 3.1 (Anordnungsaxiome in $\mathbb{R}$)
Es gilt:

IV.1. *Entweder* $(x < y)$ *oder* $(x = y)$ *oder* $(x > y)$ *(Trichotomie)*

IV.2. $(x < y) \wedge (y < z) \Longrightarrow (x < z)$ *(Transitivität)*

IV.3. $(x < y) \wedge z \in \mathbb{R} \Longrightarrow z + x < z + y$ *(Monotonie der Addition)*

IV.4. $(x < y) \wedge (0 < z \in \mathbb{R}) \Longrightarrow zx < zy$ *(Semi-Monotonie der Multiplikation)*

Notation $x \leq y \Longleftrightarrow (x < y \vee x = y) \Longleftrightarrow y \geq x$

Definition 3.2 (Betrag von x)
$\forall x \in \mathbb{R}$ *ist der Betrag für* x *definiert als:*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

Lemma 3.3 (Eigenschaften des Betrages)

(i) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *(Definitheit)*

(ii) $|xy| = |x||y|$ *(Homogenität)*

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

(iv) $|x - y| \geq ||x| - |y||$ *(inverse Dreiecksungleichung)*

Bemerkung Das Lemma gilt auch für die Verallgemeinerung des Betrages $|x|$ von Zahlen $x \in \mathbb{R}$ auf Normen $\|x\| \in \mathbb{R}$ von Vektoren x in endlich oder unendlichdimensionalen Räumen, wie zum Beispiel im $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm, woher die Dreiecksungleichung ihren Namen hat.

Beweis: Die Beweise für *i*) und *ii*) folgen unmittelbar aus der Definition.

(iii) Beweis der Dreiecksungleichung durch Fallunterscheidung:

- $x \geq 0$ und $y \geq 0$: $\Longrightarrow 0 \leq x + y = |x + y| = |x| + |y|$
- $x \leq 0$ und $y \geq 0$:
- $x \leq -y \Longrightarrow x + y \leq 0 \Longrightarrow |x + y| = -(x + y) = -x - y$ und $-x \leq |x|$, $-y \leq |y| \Longrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$
- $x > -y \Longrightarrow x + y > 0 \Longrightarrow |x + y| = x + y$ und $x \leq |x|$, $y \leq |y| \Longrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$

- $x \geq 0$ und $y \leq 0$: Behauptung folgt aus Symmetrie.
- $x \leq 0$ und $y \leq 0$:

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 0 \geq x + y = -|x + y| = -(-x) + (-(-y)) = -|x| - |y| \\ &\Longrightarrow |x + y| = |x| + |y| \end{aligned}$$

(iv) Folgt aus ii) gemäß:

$$\begin{aligned} |x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \\ |y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| \Longrightarrow |y| - |x| \leq |y - x| \\ \Longrightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y| \end{aligned}$$

Definition 3.4 (max und min)
Für Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist das Maximum der beiden $\max(x,y)$ und das Minimum $\min(x,y)$ wie folgt definiert:

$$\max(x,y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$
$$\min(x,y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$$

Korollar 3.5 (Eigenschaften von max und min)
Auf der Menge $\mathbb{R}$ erfüllen die binären Operationen $\min(x,y)$ und $\max(x,y)$ die folgenden Eigenschaften:

(i) Kommutativität: $\min(x,y) = \min(y,x)$ *beziehungsweise* $\max(x,y) = \max(y,x)$

(ii) Assoziativität: $\min(x, \min(y,z)) = \min(\min(x,y),z)$ *beziehungsweise* $\max(x, \max(y,z)) = \max(\max(x,y),z)$

(iii) Distributivität: $\max(\min(x,y),z) = \min(\max(x,z), \max(y,z))$
beziehungsweise $\min(\max(x,y),z) = \max(\min(x,z), \min(y,z))$

Bemerkung Es gibt in $\mathbb{R}$ kein neutrales Element bezüglich min und max, denn selbst wenn angenommen wird, dass es ein neutrales Element u gibt, dann:

$$\min(x,u) = x \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow u = \infty \notin \mathbb{R}$$

Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ um $\pm\infty$ verletzt die Körperaxiome.

Bemerkung Genauso wie Summe, Produkt und andere sowohl kommutative wie assoziative Operationen, lässt sich auch min und max auf endliche Argumenttupel übertragen.

Definition 3.6 (Verallgemeinerung von max und min)
Es sei ein endliches Argumententupel $(a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ gegeben:

$$\max\left((a_j)_{j=1}^n\right) := \max\left(\max\left((a_j)_{j=1}^{n-1}\right), a_n\right) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$
$$\min\left((a_j)_{j=1}^n\right) := \min\left(\min\left((a_j)_{j=1}^{n-1}\right), a_n\right) = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Frage Kann man auch max und min von unendlich langen Tupeln (Folgen) oder unendlichen Mengen reeller Zahlen bilden?

Antwort In gewissem Sinne ja, vorausgesetzt, die Vollständigkeit des geordneten Zahlenkörpers ist sichergestellt.

§4 Vollständigkeit der reellen Zahlen

Definition 4.1 (Beschränktheit und Schranken)
In einem Körper $\mathbb{K}$, der die Axiome I-IV erfüllt, definieren wir für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ folgende Begriffe:

(i) $s \in \mathbb{K}$ heißt obere Schranke von M, falls $\forall a \in M : a \leq s$ gilt.

(ii) M heißt nach oben beschränkt, falls ein solches $s \in \mathbb{K}$ existiert.

(iii) $s \in \mathbb{K}$ heißt untere Schranke von M, falls $\forall a \in M : a \geq s$ gilt.

(iv) M heißt nach unten beschränkt, falls ein solches $s \in \mathbb{K}$ existiert.

Bemerkung Für ein $\mathbb{K}$ wie oben, bezeichnen wir $M \subseteq \mathbb{K}$ als beschränkt oder unbeschränkt, falls einer der Fälle zutrifft:

(i) M heißt beschränkt, falls es sowohl nach oben als auch unten beschränkt ist.

(ii) M heißt unbeschränkt, falls es weder nach oben noch nach unten beschränkt ist.

Definition 4.2 (Supremum und Infimum)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper wie zuvor und $M \subseteq \mathbb{K}$.

- *Eine obere Schranke $s \in \mathbb{K}$ heißt kleinste obere Schranke oder* Supremum *von M, falls*

$$\forall s' \in \mathbb{K},\ s' \text{ obere Schranke , gilt: } s \leq s'$$

Es gibt höchstens ein solches Supremum und man schreibt: $s = \sup(M)$. Gilt für $s \in \mathbb{K}$, dass $s \in M$, dann heißt es auch Maximum von M und man schreibt: $s = \sup(M) = \max(M)$.

- *Eine untere Schranke $s \in \mathbb{K}$ heißt größte untere Schranke oder* Infimum *von M, falls*

$$\forall s' \in \mathbb{K},\ s' \text{ untere Schranke , gilt: } s \geq s'$$

Es gibt höchstens ein solches Infimum und man schreibt: $s = \inf(M)$. Gilt für $s \in \mathbb{K}$, dass $s \in M$, so heißt es auch Minimum von M und man schreibt: $s = \inf(M) = \min(M)$.

Beispiel 1.): Jede endliche Menge M lässt sich durchnummerieren, so dass $M = \{a_j\}_{j=1}^n$ und $\inf(M) = \min(M) = \min(\{a_j\}_{j=1}^n) \leq \sup(M) = \max(M) = (\{a_j\}_{j=1}^n)$

2.): $M = \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ hat $\inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N}) = 1$. $\mathbb{N}$ ist aber nach oben unbeschränkt, da nach dem Archimedischen Gesetz gilt: $\forall x \in \mathbb{Q}\, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$.
Mit anderen Worten: $\mathbb{N}$ hat keine obere Schranke $x \in \mathbb{Q}$. Diese Aussage folgt später aus Axiom V, dem Supremumsprinzip.

3.): $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ hat das $\sup(M) = \max(M) = 1$ und $\inf(M) = 0 \neq \min(M)$, da nach Archimedes: $\mathbb{Q} \ni s \leq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \frac{p}{q} \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (p = 0 \vee n \leq \frac{q}{p} \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow s = 0$ ist tatsächlich größte untere Schranke.

4.): $M \equiv \{0 \leq x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ hat $\inf(M) = 0 = \min(M)$ und ist nach oben beschränkt. In Übung zu zeigen: Mit Hilfe von Archimedes und der Binomialformel, dass M kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat.

Axiom V: Vollständigkeit
Jede nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum $\sup(M)$.

Bemerkung Da für M nach unten beschränkt gilt: $\inf(M) = -\sup(-M)$, folgt: jede nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum $\inf(M)$.
$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, da z.B. die Menge $M = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x^2 > 2, x > 0\right\}$ zwar nach unten beschränkt ist, jedoch ihr Infimum $\inf(M) = \sqrt{2}$ liegt nicht in $\mathbb{Q}$.
Wie auch bei anderen Axiomen bleiben wir den Beweis schuldig, dass diese Eigenschaften wirklich erzielt werden können. Ein konstruktiver Beweis über Dedekindsche Schnitte oder Cantorsche Fundamentalfolgen ist möglich.

Korollar 4.3
Axiom V impliziert, dass $\forall 0 < x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x < n$.

Beweis: Annahme, die rechte Ungleichung gilt nicht, so gibt es ein x mit $x \geq n\, \forall n \in \mathbb{N}$. Somit ist $\mathbb{N}$ durch x nach oben beschränkt und muss nach Axiom V ein Supremum s haben. Da s Supremum ist, ist $s - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, d.h es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n \Rightarrow s < n + 1$. Somit ist s auch keine obere Schranke im Widerspruch zur Annahme.
Beweis für $\frac{1}{n}$ analog. □

Satz 4.4 (Existenz, Eindeutigkeit und Monotonie der Wurzelfunktion)
Für $0 < c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $0 < x \in \mathbb{R}$, so dass $x^n = c$. Dieses x wird mit $\sqrt[n]{c}$ bezeichnet und ist monoton bezüglich c, das heißt $c' \geq c \Rightarrow \sqrt[n]{c'} \geq \sqrt[n]{c}$.

Beweis: Zunächst gilt für $0 < x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x^n - y^n) = (x - y) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j} = (x-) \left(y^{n-1} + xy^{n-2} + \ldots + x^{n-1}\right) \Rightarrow x \leq y \Longleftrightarrow x^n \leq y^n,$$

das heißt die Potenz x^n ist für $x > 0$ eine streng monotone Funktion. Außerdem gilt:
$M := \{0 \leq y \in \mathbb{R} : y^n \leq c\} \neq \emptyset$, da $0 \in M$, und die Menge ist nach oben beschränkt. Das gilt weil:
$(1 + c) \notin M$, da: $(1 + c)^n = \sum_{j=0}^n c^j \cdot \geq c + 1 > c$. Wegen Monotonie ist für alle $x > c + 1$ auf $x^n > (1 + c)^n > c$,

und somit $x \notin M$

Nach Axiom V existiert somit ein Supremum $x = \sup(M) \leq 1 + c$. Es gilt $x > 0$ weil: Sei $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > \max\{\frac{1}{c}, 2\}$ dann $\frac{1}{n_0} < c, \frac{1}{n_0} < 1$, somit $0 < (\frac{1}{n_0})^n < \frac{1}{n_0} < c$, deswegen $\frac{1}{n_0} \in M$ und schließlich $x \geq \frac{1}{n_0} > 0$. Nun bleibt zu zeigen, dass $x^n = c$ durch Ausschluss der Möglichkeiten $x^n < c$ und $x^n > c$.

Fall 1: $x^n > c$
Betrachte $(x - \frac{1}{m}), m \in \mathbb{N}, m > \frac{1}{x}$ und zeige, dass es für hinreichend großes m auch eine obere Schranke wäre:

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^n = x^n \left(1 - \underbrace{\frac{1}{mx}}_{\leq 1 \text{ für } m > \frac{1}{x}}\right)^n \underset{Bernoulli}{\geq} x^n \left(1 - \frac{n}{mx}\right) = \left(\frac{x^n}{c}\right)\left(1 - \frac{n}{mx}\right) \cdot c > c$$

$$\iff \left(\frac{x^n}{c}\right)\left(1 - \frac{n}{mx}\right) > 1 \iff 1 - \frac{n}{mx} > \frac{c}{x^n} \iff \frac{n}{mx} < 1 - \frac{c}{x^n} \iff m > \frac{n}{x\left(1 - \frac{c}{x^n}\right)}$$

Die letzte Bedingung wäre genau dann erfüllbar , wenn $1 > \frac{c}{x^n} \iff x^n > c$.

Das führt zum Widerspruch zur Supremumseigenschaft, so dass $x^n \leq c$ sein muss.

Fall 2: $x^n < c$
Betrachte $(x + \frac{1}{m})$ und zeigen dass es für hinreichend großes m auch noch zu M gehört, im Widerspruch zur Supremumseigenschaft.

$$\left(x + \frac{1}{m}\right)^n = x^n \left(1 + \frac{1}{mx}\right)^n = x^n \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{mx}\right)^j \leq x^n \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n}{mx}\right)^j$$

$$= x^n \cdot \frac{\left(\frac{n}{mx}\right)^n - 1}{\underbrace{\frac{n}{mx}}_{< 1 \text{ für } m > \frac{n}{x}} - 1} = x^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{n}{mx}\right)^{n+1}}{1 - \frac{n}{mx}} \leq \frac{x^n \cdot c}{c \cdot \left(1 - \frac{n}{mx}\right)} < c$$

$$c \iff \frac{x^n}{c \cdot \left(1 - \frac{n}{mx}\right)} < 1 \iff \frac{x^n}{c} < 1 - \frac{n}{mx}$$

Die letzte Ungleichung ist genau dann erfüllbar durch großes m, falls $\frac{x^n}{c} < 1$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Supremumseigenschaft von x.

Die Monotonie folgt für $c' \geq c$: $x' = \sup(M') \geq \sup(M) = x$ mit $M' := \{0 \leq y | y^n \leq c'\} \supset M$. $\square$

Bemerkung Obiger Existenzbeweis für $\sqrt[n]{c}$ ist nicht konstruktiv, das heißt, er gibt kein Verfahren an, mit dem diese Zahl berechnet werden kann, das heißt beliebig nahe durch $\tilde{x} \in \mathbb{Q}$ angenähert werden kann.

III Folgen und Reihen

§1 Folgen und Konvergenz

Definition 1.1
Eine Folge ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ein Folgenglied für $n \in \mathbb{N}$ ist das Bild der Funktion f von $\{n\}$, also

$$x_n := f(n)$$

Anders kann eine Folge auch als Iteration bzw. rekursiv durch eine Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und einen Startwert $x_1 \in \mathbb{N}$ definiert werden, sodass

$$x_{n+1} = g(x_n, n)$$

Bemerkung Folgenglieder werden fast nur durch die Schreibweise x_n spezifiziert. Ebenso werden ganze Folgen häufig durch die Notation $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, bzw. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ausgedrückt. Es ist üblich, die Notation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, abzukürzen mit (x_n) und falls die Verwechslung mit einfachen Folgengliedern ausgeschlossen ist, werden Folgen auch oft nur mit x_n bezeichnet.

Beispiel Betrachte die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mit $f(n) = \frac{1}{n!}$, dann ist:

$$x_n = \frac{1}{n!} \iff x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1} \text{ mit } x_1 = 1! = 1$$

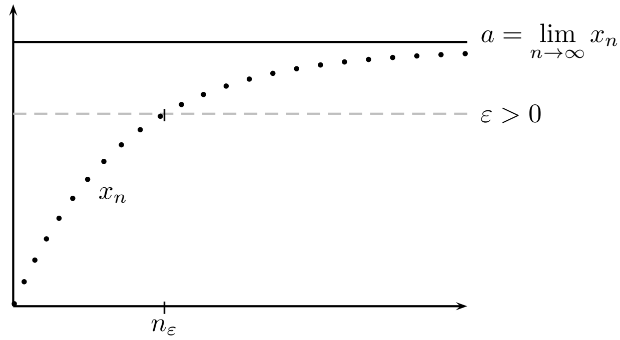
Bemerkung Das *endliche Anfangssegment* einer Folge ist nicht von Interesse, sondern das Verhalten im *Unendlichen.* D.h., zwei Folgen (x_n) und $(\tilde{x}_n)$ gelten als äquivalent, falls für ein festes m und alle n gilt: $\tilde{x}_n = x_{n+m}$.

Definition 1.2 (Konvergenz einer Folge)
Eine Folge (x_n) heißt gegen den Grenzwert a konvergent, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon$$

Zur Schreibweise: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ oder $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Falls ein solches $a \in \mathbb{R}$ existiert, heißt die Folge konvergent, sonst divergent.



Lemma 1.3
(i) Eine Folge (x_n) hat höchstens einen Grenzwert. D.h., der Grenzwert ist eindeutig.

(ii) Ein konvergente Folge ist (nach oben und nach unten) beschränkt, in dem Sinne dass die Menge $f(\mathbb{N}) = \mathrm{im}(f) = \{x_n = f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist. M.a.W. ist Beschränktheit für eine konvergente Folge notwendig, *aber nicht* hinreichend.

Beweis: (i) Annahme, (x_n) hat die Grenzwerte $\tilde{a} \neq a$. Dann existiert für ein gut gewähltes $\varepsilon = \frac{|a-\tilde{a}|}{3}$ zwei untere Schranken n_ε und $\tilde{n}_\varepsilon$, so daß gilt:

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_\varepsilon$$
$$|x_n - \tilde{a}| < \varepsilon \text{ für } n \geq \tilde{n}_\varepsilon$$

Daraus folgt für $n \geq \max(n_\varepsilon, \tilde{n}_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} |a - \tilde{a}| &= |a - x_n + x_n - \tilde{a}| \leq |a - x_n| + |x_n - \tilde{a}| \leq \varepsilon + \varepsilon \\ &= \frac{2}{3}|a - \tilde{a}| < |a - \tilde{a}| \end{aligned}$$

Also führt die Annahme, dass $|a - \tilde{a}| \neq 0$, zu einem Widerspruch!

(ii) Wegen der Konvergenz existiert für $\varepsilon = 1$ ein $n(1)$, so dass $|x_n - a| \leq 1 \Rightarrow x_n \leq a + 1$ für $n \geq n(1)$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $x_n \leq \max(x_1, \ldots, x_{n(1)-1}, a+1)$ und entsprechend $x_n \geq \min(x_1, \ldots, x_{n(1)-1}, a-1)$ $\square$

Beispiel Die Folge $x_n = (-1)^n$ ist sowohl divergent, als auch beschränkt. Denn es gilt:

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_{n+1} - a - x_n + a| \leq |x_{n+1} - a - x_n + a| \leq |x_{n+1} - a| + |x_n - a|$$

Somit ist klar $1 \leq \max(|x_{n+1} - a|, \; |x_n - a|)$ und damit kann es für $\varepsilon < 1$ kein n_ε geben.

Definition 1.4 (Monotonie)
Eine Folge (x_n) heißt

- *(monoton) fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x_n \geq x_{n+1}$*

- *(monoton) steigend, falls $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x_n \leq x_{n+1}$*

- *streng (monoton) fallend, falls* $\forall n \in \mathbb{N}$ *gilt, dass* $x_n > x_{n+1}$

- *streng (monoton) steigend, falls* $\forall n \in \mathbb{N}$ *gilt, dass* $x_n < x_{n+1}$

Bemerkung Eine Folge (x_n) wird asymptotisch steigend oder asymptotische streng steigend genannt, falls die Bedingungen erst ab einem n_0, für $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, gelten.

Satz 1.5 (Konvergenz monotoner, beschränkter Folgen)
Jede monoton steigende nach oben beschränkte Folge beziehungsweise jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert und zwar gegen $\sup(x_n : n \in \mathbb{N})$ *beziehungsweise* $\inf(x_n : n \in \mathbb{N})$*. M.a.W. ist Monotonie und Beschränktheit einer Folge ein* hinreichendes Kriterium *für Konvergenz.*

Bemerkung Die Gegenrichtung (Aus Konvergenz solle Beschränktheit und Monotonie folgen) gilt im Allgemeinen natürlich nicht, da konvergente Folgen nicht monoton sein müssen, wie es am Beispiel $(x_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ zu sehen ist.

> **Beweis:** Für beliebiges $\varepsilon > 0$ kann $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} - \varepsilon = a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sein. Also existiert ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $x_{n(\varepsilon)} \geq a - \varepsilon \leq a \Rightarrow |x_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n(\varepsilon)$. Entsprechendes gilt für inf bei monoton fallenden Folgen. □

Beispiel (monotone Konvergenz und iterative Vorschrift: Die Newton-Iteration für $x^2 - c = 0$)
Sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$ und $\mathbb{R} \ni c > 0$ konstant, gegeben.

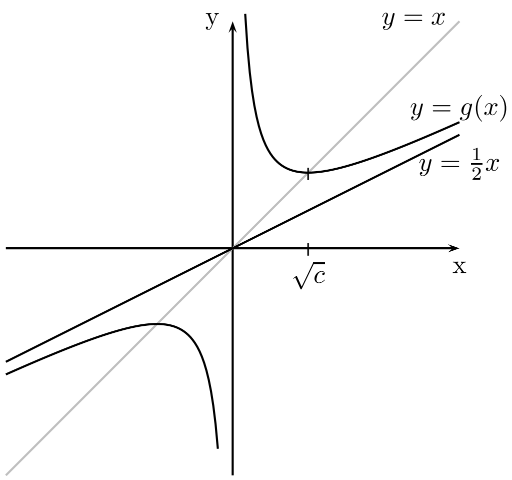
$$\left.\begin{array}{ll} x > 0 & \Longrightarrow g(x) > 0 \\ x < 0 & \Longrightarrow g(x) = -g(-x) < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g \text{ bildet } \mathbb{R}_+ \text{ nach } \mathbb{R}_+ \\ \text{und } \mathbb{R}_- \text{ nach } \mathbb{R}_- \text{ ab.} \end{array}$$

g ist eine ungerade (bzw. punktsymmetrische) Funktion, da

$$-g(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{c}{-x}\right) = g(-x)$$

D.h., das Verhalten von g muss nur für $x > 0$ untersucht werden. Gemäß der Definition für Folgen ist die Iteration $x_{n+1} = g(x_n)$, mit einem Startwert $x_1 > 0$, eine Folge und wird stationär genau dann, wenn

$$x_{n+1} = x_n = g(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$
$$\Longleftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{c}{2x_n^2} \Longleftrightarrow x_n^2 = c \Longleftrightarrow x_n = \sqrt{c}$$



Nun sei $x_1 > 0$ beliebig, dann ist nach vorherigen Untersuchungen bereits klar, dass $x_2 = g(x_1) > 0$ und $x_n > 0$ für alle weiteren $n \in \mathbb{N}$. Um Aussagen über das Verhältnis der x_n in Bezug zur Konstanten c fällen zu können, wird der Term $x_{n+1}^2 - c$ betrachtet:

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)^2 - c = \frac{1}{4}\left[x_n^2 + 2c + \frac{c^2}{x_n^2} - 4c\right] \qquad \Leftarrow \text{nach binomischer Formel}$$
$$= \frac{1}{4}\left[x_n^2 - 2c + \frac{c^2}{x_n^2}\right] = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{c}{x_n}\right)^2 \geq 0$$

Folglich gilt $x_{n+1}^2 - c \geq 0 \Longleftrightarrow x_{n+1}^2 \geq c \Longleftrightarrow x \geq \sqrt{c}$. Nun interessiert die Beziehung zweier beliebiger aufeinander folgender Folgenglieder x_{n+1}, x_n und deshalb wird jetzt, für $n \geq 2$, betrachtet:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n - x_n + \frac{c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{x_n} - x_n\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{c}{x_n}\right) = -\frac{1}{2x_n}\underbrace{\left(x_n^2 - c\right)}_{\geq 0, \text{ wie ja eben festgestellt}} \leq 0$$

Somit gilt, dass die Folge monoton fällt und durch $\sqrt{c}$ nach unten beschränkt ist. Also existiert, aufgrund von Monotonie und Beschränktheit, ein eindeutiger Grenzwert a. Zu zeigen bleibt das $\sqrt{c}$ dieser Grenzwert ist.

Aufgrund der Konvergenz kann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gefunden werden, sodass $\forall n_\varepsilon < n \in \mathbb{N}$ gelten muss $|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}\varepsilon > |x_n - a|$ und somit:

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_{n+1} \underbrace{-a + a}_{=0} - x_n| \leq |x_{n+1} - a| + |a - x_n| \leq \frac{2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \geq |x_{n+1} - x_n| = x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 + c\right) = \frac{2x_n^2}{2x_n} + \frac{1}{2x_n}(-x_n^2 - c) = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - c) \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{c})(x_n + \sqrt{c}) \geq \frac{\sqrt{c}}{2x_1}(x_n - \sqrt{c}) \Longrightarrow x_n - \sqrt{c} \leq \frac{2x_1}{\sqrt{c}}\varepsilon\end{aligned}$$

Der Term $\frac{2x_1}{\sqrt{c}}$ ist konstant. Somit lässt sich die Differenz $x_{n>n_\varepsilon} - \sqrt{c}$ durch beliebig kleine $\varepsilon > 0$ drücken und die Konvergenzdefinition ist erfüllt.

Diese Folge lässt erweitern, sodass gegen die Lösung x für die Gleichung $x^m = c \Longleftrightarrow x = \sqrt[m]{c}$ konvergiert:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{c}{mx_n^{m-1}}$$

Dieses Verfahren zur Annäherung der Wurzel wird als *Heron-Verfahren* oder auch als *babylonisches Wurzelziehen* bezeichnet. Es ist ein Spezialfall des Newtonverfahrens zur Nullstellensuche. Die Newtoniteration ist die Folge, die gegen die Nullstelle strebt. In diesem Fall wird die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - c = 0$ gesucht.

§2 Grenzwertsätze

Satz 2.1 (Grenzwertsätze)
Falls (x_n) und (y_n) gegen a und b konvergieren, gilt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b$ *(Additivität)*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$ *und damit gilt insbesondere* $\lim_{n\to\infty} cx_n = c \lim_{n\to\infty} x_n = ca$ *(Homogenität)*

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$, *vorausgesetzt* $b \neq 0$

Die Eigenschaften i) und ii) ergeben zusammen die Linearität des Grenzwertes.

Bemerkung Die Schreibweise $\lim_{n\to\infty}(x_n)$ impliziert bereits die Existenz eines Grenzwertes a von x_n.

Beweis: Seien $n_x(\varepsilon)$ und $n_y(\varepsilon)$ Schrankenfunktionen. Damit sei gemeint dass $|x_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_x(\varepsilon)$ und $|y_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq n_y(\varepsilon)$

(i) Für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $n \geq n_\varepsilon = \max(n_x(\frac{\varepsilon}{2}), n_y(\frac{\varepsilon}{2}))$ folgt, dass

$$\begin{aligned}&|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow |x_n \pm y_n - a \mp b| = |x_n - a \pm (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow a \pm b$ ist somit Grenzwert von $x_n \pm y_n$.

(ii) Da (y_n) konvergiert, hat es eine obere Schranke s. Desweiteren sei $a \neq 0$ angenommen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| \\ &\leq |x_n - a|s + |a||y_n - b| < \varepsilon \\ &\Rightarrow n \geq \max\left(n_x\left(\frac{\varepsilon}{2s}\right), n_y\left(\frac{\varepsilon}{2|a|}\right)\right) \vee \left(a = 0 \wedge n \geq n_x\left(\left(\frac{\varepsilon}{s}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

(iii) Zunächst kann $\frac{x_n}{y_n}$ als $x_n \cdot \frac{1}{y_n}$ wahrgenommen werden. Unter Berufung auf ii) muss demnach nur noch sichergestellt werden, dass $\frac{1}{y_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{b}$.
Da y_n konvergiert, gilt $|y_n - b| \leq \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ für alle $\varepsilon > 0$, also insbesondere für ein bestimmtes $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Daher erhalten wir: $|y_n - b| \leq \frac{|b|}{2} \implies |y_n| \geq \frac{|b|}{2}$, für genügend große $n \geq n_\varepsilon = n_{\frac{|b|}{2}}$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ und alle $n \geq \max(n_\varepsilon, n_{\frac{|b|}{2}})$ gilt dann:

$$\implies \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{b\,|y_n|}\right| \leq \frac{|b - y_n|}{|b| \cdot \frac{|b|}{2}} < \frac{2\,\varepsilon}{|b|^2} = \tilde{\varepsilon}$$

Zu beliebigem $\tilde{\varepsilon} > 0$ findet man also mit $\varepsilon = \frac{|b|^2}{2}\tilde{\varepsilon}$ ein $\tilde{n}_{\tilde{\varepsilon}} = \max(n_\varepsilon, n_{\frac{|b|}{2}})$ mit $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| < \tilde{\varepsilon}$ für alle $n \geq \tilde{n}_{\tilde{\varepsilon}}$, woraus die Konvergenz folgt. □

Bemerkung (Warnung) $\lim_{n\to\infty} x_n \circ y_n$, wobei „$\circ$" hier stellvertretend für beliebige Verknüpfungen steht, kann auch dann existieren und wohldefiniert sein, wenn die Grenzwertsätze nicht anwendbar sind. D.h., die Grenzwertsätze sind lediglich hinreichend, aber nicht notwendig.

Beispiel (i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + \underbrace{(-x_n)}_{y_n}) = 0$, selbst wenn $x_n = n^3$ und somit selbst keinen Grenzwert hat.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n^c} y_n) = 0$ falls (y_n) beschränkt, im Sinne des Beispiels nicht notwendigerweise konvergent und $c > 0$.

Satz 2.2 (Monotonie des Grenzwertes & Sandwichlemma)
Falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *und* (z_n) *beliebig, so folgt aus* $x_n \leq z_n \leq y_n \forall n \in \mathbb{N}$:

i) $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *und*

ii) $a = b$ *impliziert, dass* (z_n) *konvergiert mit Grenzwert* $a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$.

Beweis: Die Beweisidee ist, dass falls die Annahme nicht gilt, müssen die Folgenglieder x_n ab einem abhängigen n_ε alle größer sein als die Folgenglieder y_n. Also angenommen $b < a$, so gilt für $\varepsilon = \frac{(a-b)}{3} = \frac{|b-a|}{3}$ und $n \geq \max(n_x(\varepsilon),\, n_y(\varepsilon))$, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$ und $|y_n - a| < \varepsilon$ gilt, dann:

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - a| < \varepsilon \implies x_n > a - \varepsilon, \\ |y_n - b| < \varepsilon \implies y_n < b + \varepsilon \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} 0 \leq y_n - x_n < b + \varepsilon - a + \varepsilon \\ \quad = -(a-b) + 2\,\frac{a-b}{3} = -\frac{1}{3}(a-b) < 0 \qquad \text{Widerspruch.} \end{array}$$

Ist $a = b$, so folgt, dass $n_z(\varepsilon) = \max(n_x(\varepsilon),\, n_y(\varepsilon))$ gewählt werden kann, denn dann gilt für jedes $n > n_z(\varepsilon)$

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n \leq b + \varepsilon = a + \varepsilon,$$

so dass die Folge (z_n) gegen $a = b$ konvergiert. □

Lemma 2.3 (Folgeneigenschaft vom Supremum/Infimum)
Für $M \subseteq \mathbb{R}$ *gilt:*

$$s = \sup(M) \iff s \geq x \,\forall\, x \in M \wedge \exists\,(x_n) \subset M : \lim_{n\to\infty} x_n = s$$

Entsprechend für $\inf(M)$.

Beweis: "$\Rightarrow$":s aber nicht $s - \frac{1}{n}$ ist obere Schranke. Es gibt also jeweils ein mit x_n bezeichnetes Element, so dass $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| \leq \frac{1}{n} = \varepsilon$. Also bilden die so konstruierten x_n eine gegen s konvergierende Folge aus M.

" $\Longleftarrow$ ": s obere Schranke. Annahme: $s' = s - \varepsilon$ wäre auch obere Schranke. Dann existiert ein $n = n(\varepsilon)$, so dass $|s - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow x_n > s - \varepsilon = s'$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Supremumeigenschaft von s' □

Definition 2.4 (Nullfolgen und uneigentlicher Grenzwert)

(i) $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *heißt Nullfolge, falls* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

(ii) $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *divergiert gegen* ∞*, in Zeichen* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$*, wenn* $\forall\, \varepsilon\ > 0\, \exists\, n(\varepsilon) : x_n > \frac{1}{\varepsilon} \forall n \geq n(\varepsilon)$

(iii) $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *divergiert gegen* $-\infty$*falls* $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = \infty$

Bemerkung Im Falle ii.) und iii.) nennt man $\pm\infty$ auch uneigentlichen Grenzwert und sagt häufig, (x_n) konvergiert oder divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$.

Lemma 2.5 (Grenzwert des Kehrwertes bestimmt divergenter Folgen)
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ *oder* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*, dann gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$
M.a.W. Der Kehrwert bestimmt divergenter Folgen ist eine Nullfolge.

Beweis:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \Rightarrow \forall\varepsilon\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{1}{|x_n|} = |\frac{1}{|x_n|} - 0| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \text{ist Nullfolge}$$

Bemerkung Die Umkehrung des Lemmas über den *Grenzwert des Kehrwertes bestimmt divergenter Folgen* ist nicht wahr.

Bemerkung (Beobachtung) Die Grenzwertsätze sind auf uneigentliche Grenzwerte bedingt erweiterbar, das heißt für $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm z_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot z_n) = \operatorname{sign}(c) \cdot \infty$ falls $c \neq 0$

Keine Aussage kann jedoch in folgenden Fällen gemacht werden:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot z_n)$ falls $c = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n})$

§3 Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß und Cauchy

Bemerkung Sowohl für konvergente als auch für rein beschränkte Folgen gilt, dass es sog. *Teilfolgen* gibt, die konvergieren. Der noch zu beweisenden Satz von Bolzano-Weierstraß sichert uns diese wichtige Erkenntnis.

Warnung: Dies gilt jedoch nicht in unendlichdimensionalen Räumen wie der Menge der univariaten Polynome oder der Menge stetiger Funktionen auf endlichen Intervallen!

Definition 3.1
Wir definieren $(\tilde{x}_n) \subset \mathbb{R}$ *als Teilfolge von* $(x_n) \subset \mathbb{R}$*, falls es eine streng monoton steigende Indexfunktion* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gibt, mit* $\tilde{x}_n = x_{h(n)}$.
s heißt Häufungspunkt, falls $s = \lim_{n\to\infty}(\tilde{x}_n)$ *für eine Teilfolge* $(\tilde{x}_n)$ *der ursprünglichen Folge* (x_n) *ist.*

Beispiel Sei eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist für $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mit $h(n) = 2n$, eine mögliche Teilfolge $(x_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}} = x_2, x_4, x_6, \ldots$. M.a.W. h ist so gewählt, dass wir $\forall n \in \mathbb{N}$ nur jedes zweite Folgenglied der ursp. Folge erhalten.

Sehr häufig wird die Indexfunktion nicht explizit angegeben, sondern mittels eines beliebigen Kriterium von den Gliedern von x_n ausgewählt, zum Beispiel: $\tilde{x}_n = (\text{alle positiven } \sin(n))$. Dann ist nicht immer a priori klar, dass die Teilfolge tatsächlich unendlich viele Glieder enthält, wie eigentlich für Teilfolgen verlangt. Dies muss dann gegebenenfalls verifiziert werden.

Lemma 3.2 (Konvergenz der Teilfolgen einer konvergenten Folge)

(i) Jede Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ einer gegen a konvergenten Folge (x_n) hat genau denselben Grenzwert $\lim(\tilde{x}_n) = a$.

(ii) Jede Folge hat monotone Teilfolgen, die steigend oder fallend sein kann.

Beweis: (i) Per Induktion lässt sich leicht zeigen, dass $h(n) \geq n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $h(n)$ die Indexfunktion von $(\tilde{x}_n)$. Aus der Konvergenz von (x_n) folgt:
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon\, \forall\, n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_{h(n)} - a| < \varepsilon$ da $h(n) \geq n \geq n(\varepsilon)$
Also konvergieren auch die Teilfolgen gegen a.

(ii) Bezeichne alle Elemente x_n, für die gilt: $n' > n \Rightarrow x_{n'} \leq x_n$ als Spitzen der Folge (x_n). Diese bilden dann eine monoton fallende Teilfolge, die allerdings nicht notwendigerweise unendlich viele Elemente hat oder unter Umständen sogar leer ist. Wenn nur endlich viele Spitzen vorhanden sind, bleibt zu zeigen, dass es dann eine monoton steigende Teilfolge gibt (siehe Übung). □

Satz 3.3 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge und damit mindestens einen Häufungspunkt.

M.a.W. Aus jeder beschränkten nicht endlichen Menge lässt sich eine konvergente Teilfolge $(x_n) \subset M$ bilden.

Beweis: Nach Lemma zur „Konvergenz der Teilfolgen einer konvergenten Folge“ existieren monotone Teilfolgen, die sicherlich auch beschränkt sind und deshalb einen Grenzwert a besitzen. Dieser ist laut Definition ein Häufungspunkt. □

Beispiel (i) $(x_n) = ((-1)^n)_n$ hat die konstanten Teilfolgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Grenzwerten 1 und -1, welche die Häufungspunkte von (x_n) sind.

(ii) $x_n = \sin(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ hat jeden beliebigen Wert $s \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ als Häufungspunkt.

Bemerkung Letzteres ist erstaunlich, da die per Definition abzählbare Menge von Folgengliedern eine, wie wir sehen werden, überabzählbare Menge von Häufungspunkten erzeugt. Das verlangt, dass es überabzählbar viele Teilfolgen gibt, die jeweils höchstens einen Grenzwert haben können. Dies ist in der Tat der Fall und folgt aus dem Diagonalisierungsargument: Jede Teilfolge einer festen Grundfolge lässt sich eindeutig charakterisieren durch ein Element von $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, das heißt einer Folge von 0 und 1, sodass das n-te Glied 1 ist genau dann, wenn jenes Glied zur Teilfolge gehört. Angenommen die Menge aller binären Folgen ließe sich durchnummerieren und entsprechend untereinander auflisten. Dann können wir durch die Modifikation aller diagonalen Elemente, das heißt Austauschen von 0 und 1, eine neue Folge konstruieren, die noch nicht in der Liste enthalten ist. Dies führt zum Widerspruch der angenommenen Abzählbarkeit der Anzahl der Teilfolgen.

Bemerkung Wie später durch Stetigkeitsargumente nachweisbar, ist die zweite Aussage äquivalent dazu, dass die Menge $P = \{m\, 2\pi + n | m, n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, d.h., jeden Punkt aus $\mathbb{R}$ als Häufungspunkt hat. Im gegenteiligen Fall wäre insbesondere $0 \in P$ ein isolierter Punkt, woraus folgte, dass 2π rational wäre.

Satz 3.4 (Direkte Charakterisierung von Häufungspunkten)

$a \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt einer Folge (x_n) $\iff$ $\forall\, \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}\, \exists\, m > n$ mit: $|x_m - a| < \varepsilon$

$a \in \mathbb{R}$ ist genau dann kein Häufungspunkt von (x_n), wenn $\exists\, \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N} :\ \forall\, m > n$ gilt: $|x_m - a| \geq \varepsilon$

Beweis: “$\Rightarrow$“: Nach Definition existiert eine Teilfolge $(x_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen a konvergiert. Also existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $h(n)$, das beliebig groß gewählt werden kann, so dass für $n < h(n) = m$ gilt: $|x_m - a| = |x_{h(n)} - a| < \varepsilon$.

“$\Leftarrow$“: Setze $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und finde $m(n) \geq n$, so dass $|x_m - a| < \varepsilon$. Diese $x_{m(n)}$ bilden eine unendliche Teilfolge, die gegen a konvergiert. Also ist a tatsächlich ein Häufungspunkt. □

Bemerkung Wie in der Übung zu beweisen, ist die Bedingung $\forall \varepsilon > 0\ \exists m : 0 < |x_m - a| < \varepsilon$ hinreichend, aber nicht notwendig für die Häufungspunkt-Eigenschaft von a.

Vorbemerkung: Meistens interessiert man sich nicht für alle Häufungspunkte, sondern nur für die kleinsten und größten Häufungspunkte einer Folge.

Satz 3.5 (Limes superior und Limes inferior)

Für eine nach oben beschränkte Folge (x_n) bezeichne mit $H \subset \mathbb{R}$ die Menge aller Häufungspunkte. Dann hat H ein Supremum, welches als Maximum angenommen wird und mit Limes superior bezeichnet wird.

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup(H) = \max(H)$$

Entsprechend gilt für eine nach unten beschränkte Folge (y_n):

$$\liminf_{n\to\infty} y_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \inf(H) = \min(H)$$

Beweis: In der Übung zu zeigen: Es ist mit (x_n) auch $H \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so dass $s = \sup(H)$ wirklich existiert. Nach der Folgencharakterisierung von $\sup(H)$ existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H mit $a_n \to s$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|a_n - s| < \frac{1}{n}$, das ist immer erreichbar durch Bildung einer Teilfolge. Genauso kann man zu jedem a_n eine gegen diese konvergente Teilfolge $(x_{n,k}) \subset (x_k)$ auswählen mit $|x_{n,k} - a_n| < \frac{1}{k}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |x_{n,n} - s| &\le |x_{n,n} - a_n| + |a_n - s| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \\ \implies \lim_{n\to\infty} |x_{n,n} - s| &\le \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0, \end{aligned}$$

das heißt: s ist Grenzwert der Teilfolge $(x_{n,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit selbst ein Häufungspunkt.

Dies nennt man ein Diagonalargument, wobei $\therefore$ der Zahlenfolge $x_{n,n}$ entspricht.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & \leftarrow & x_{1n} & \dots & x_{12} & x_{11} \\ \vdots & & & & \iddots & \\ \vdots & & & \iddots & & \\ a_n & \leftarrow & x_{nn} & \dots & x_{n2} & x_{n1} \\ \downarrow & \iddots & & & & \\ s & & & & & \end{array}$$

$\square$

Lemma 3.6 (Direkte Charakterisierung von Limes superior und Limes inferior)
$s := \limsup_{n\to\infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n = n(\varepsilon) : \forall m \ge n(\varepsilon) : x_m < s + \varepsilon$, *und s ist minimal bezüglich dieser Eigenschaft. Entsprechendes für* $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

M.a.W., es gilt $x_m < s + \varepsilon$ für fast alle $m \in \mathbb{N}$ und $s - \varepsilon < x_m$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

Ähnlich wie wirkliche Grenzwerte erfüllen auch $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ bestimmte Rechenregeln, die die Auswertung und Abschätzung erleichtern.

Satz 3.7 (Eigenschaften von Limes superior und Limes inferior)
Für beschränkte Folgen $(x_n), (y_n)$ gilt:

(i) Subadditivität: $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \limsup_{n\to\infty}(x_n) + \limsup_{n\to\infty}(y_n)$

(ii) Positive Homogenität: $c > 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(cx_n) = c \limsup_{n\to\infty}(x_n)$

(iii) Sublinearität: $c < 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(cx_n) = -c \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = c \liminf_{n\to\infty}(x_n)$

(iv) $\liminf_{n\to\infty}(x_n) \ge 0 \wedge \liminf_{n\to\infty}(y_n) \ge 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \le \limsup_{n\to\infty}(x_n) \limsup_{n\to\infty}(y_n)$

(v) $\liminf_{n\to\infty}(y_n) = b > 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) \le \frac{1}{b} \limsup_{n\to\infty}(x_n)$

Beweis: (v) Sei $a = \limsup_{n\to\infty}(x_n)$, dann $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \ge n(\varepsilon) : x_n \le a + \varepsilon, b - \varepsilon \le y_n$.

Daraus folgt für $\varepsilon \le \frac{b}{2}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} &\le \frac{a+\varepsilon}{b-\varepsilon} = \frac{a}{b} + \frac{(a+\varepsilon)b - a(b-\varepsilon)}{b(b-\varepsilon)} \le \frac{a}{b} + \frac{a+b}{b(b-\frac{b}{2})}\varepsilon = \frac{a}{b} + \frac{2(a+b)}{b^2}\varepsilon \\ \implies \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} &\le \frac{\limsup_{n\to\infty}(x_n)}{\liminf_{n\to\infty}(y_n)} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2}{b}\left[\frac{a}{b} + 1\right]\varepsilon = \frac{\limsup_{n\to\infty}(x_n)}{\liminf_{n\to\infty}(y_n)} \end{aligned}$$

Allerdings ist $\frac{b}{a}$ im Allgemeinen auch wirklich nur eine obere Schranke für $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$.

Frage: Lässt sich die Konvergenzeigenschaft einer beliebigen Folge (x_n) formulieren und gegebenenfalls untersuchen ohne schon explizit den Grenzwert a zu benennen?

Antwort: Ja, es gibt eine notwendige und hinreichende, auf Cauchy zurückgehende Bedingung.

Satz 3.8 (Cauchy-Folge)
Eine reelle Folge konvergiert $\Longleftrightarrow$ sie eine Cauchy-Folge ist, das heißt die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n = n_\varepsilon \text{ so dass } \forall m, m' \geq n \text{ gilt } |x_m - x_{m'}| < \varepsilon$$

Beweis: (i) „$\Rightarrow$“ : Sei $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m \geq n = \tilde{n}_{\frac{\varepsilon}{2}}$, dann gilt für $m, m' \geq n$:

$$|x_{m'} - x_m| = |x_{m'} - a + a - x_m| \leq |x_{m'} - a| + |a - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

M.a.W., die Behauptung gilt für $n_\varepsilon = \tilde{n}_{\frac{\varepsilon}{2}}$

(ii) „ $\Longleftarrow$ “: Zunächst folgt mit n_1 aus Cauchy-Kriterium, dass $|x_n| \leq \max(|x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, |x_{n_1}| + 1)$, da für $n \geq n_1$ sicher $|x_n - x_{n_1}| < 1 \Rightarrow |x_n| < |x_{n_1}| + 1$.
Also ist Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt nach Bolzano-Weierstraß eine konvergierende Teilfolge $x_{m(n)} \to a$. Für beliebiges ε gibt es ein ausreichend großes $m(n)$ mit $|x_{m(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und es gibt ein $n_{\frac{\varepsilon}{2}}$, so dass für alle $m' > n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt:

$$|x_{m'} - a| \leq |x_{m'} - x_{m(n)}| + |x_{m(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also konvergiert die gesamte Folge (x_n) gegen a. □

Bemerkung Statt die Konvergenz aller Cauchy-Folgen auf Grundlage des postulierten Supremumsaxioms V mit Hilfe von Bolzano-Weierstraß zu beweisen, kann man die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ auch konstruktiv durchführen (Vergleich: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$). Dazu werden neue reelle Zahlen durch Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen definiert. Zwei Cauchy-Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind äquivalent, falls:
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n(\varepsilon) : |x_m - y_m| < \varepsilon$, falls $m \geq n(\varepsilon)$, d.h., ihre Differenz ist eine Nullfolge.

Vergleich: Alle Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ sind äquivalent, wenn $mn' = m'n$ bei Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$. Da bei dieser Erweiterung wie bei Definition einer Cauchy-Folge nur der Betrag/Abstand $|x - y|$, nicht aber die Anordnung der rationalen Zahlen vorkommt, lässt sich die Vervollständigung durch Cauchy-Folgen auch in nicht angeordneten Körpern wie $\mathbb{C}$ und allgemeinen metrischen Räumen durchführen.

§4 Unendliche Zahlenreihen

Definition 4.1 (Reihe)
Zu einer Folge reeller Zahlen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ werden die Partialsummen *definiert als:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Falls die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eigentlich oder uneigentlich gegen ein $s \in [-\infty, \infty]$ konvergieren, so wird dieser Grenzwert als die unendliche Reihe oder nur kurz als Reihe bezeichnet. Die Schreibweise lautet:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

Bemerkung Häufig wird zuerst eine unendliche Summe von parameterabhängigen Termen a_k als $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ hingeschrieben, bevor die Frage der Konvergenz der Partialsummen geklärt wird.

Lemma 4.2
Die Reihe $s = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn* $s' = \sum\limits_{k=n_0'}^{\infty} a_k$, *für* $1 \leq n_0 \leq n_0'$, *konvergiert. Dann gilt*

$$s = \sum_{k=n_0}^{n_0'-1} a_k + s' = c + s'$$

Beweis: Betrachte die Partialsummen s_n und s_n', für $n > n_0'$ gilt:

$$s_n = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n_0'-1} a_k}_{=c} + s_n' = c + s_n'$$

Nach den Grenzwertsätzen folgt nun, dass s_n konvergiert genau dann, wenn s_n' konvergiert. Falls verifiziert werden kann, dass eine der beiden konvergiert, so folgt

$$s_n = c + s_n' \xrightarrow{n\to\infty} s = c + s'$$

□

Beispiel (Geometrische Reihe) Die geometrische Reihe hat, für $(c, q) \in \mathbb{R}^2$, die Form

$$c \cdot x = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot q^n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Die Partialsummen dazu sind:

$$c \cdot x_n = c \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k$$

Für welche q die Reihe bestimmt konvergiert und welchen Grenzwert die Reihe dann annimmt, lässt sich durch einen einfachen Trick herausfinden:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$
$$q \cdot x_n = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$$
$$x_n - qx_n = x_n(1-q) = 1 + q - q + q^2 - q^2 + \cdots + q^n - q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \iff x_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Demnach konvergiert, gemäß der Grenzwertsätze, die geometrische Reihe in folgenden Fällen:

$$c \cdot x = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{c}{1-q} & \text{, falls } |q| < 1 \\ \operatorname{sign}(c) \cdot \infty & \text{, falls } q \geq 1 \\ \text{konvergiert nicht} & \text{, falls } q \leq -1 \end{cases}$$

Beispiel Sei eine Folge $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$. Demnach lauten die assoziierten Partialsummen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Eine eventuelle Konvergenz erscheint nicht offensichtlich. Es gilt aber auch $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, so dass:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Die Umformung der Folge a_k hat hier die Arbeit erleichtert, so dass sich fast alle Terme gegenseitig aufgehoben haben.

Definition 4.3 (absolute Konvergenz)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *heißt absolut konvergent genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *der Absolutbeträge konvergiert.*

Satz 4.4 (Cauchy-Kriterium für Reihen)

(i) Eine Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^{m'} a_n \right| < \varepsilon, \textit{ falls } n_\varepsilon \leq m \leq m'$$

(ii) Eine Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *konvergiert sogar absolut genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \sum_{k=m+1}^{m'} |a_n| < \varepsilon, \textit{ falls } n_\varepsilon \leq m \leq m'$$

(iii) Absolute Konvergenz einer Reihe impliziert gewöhnliche Konvergenz.

Beweis:

(i) Wir führen den Sachverhalt auf die Cauchy-Konvergenzdefinition für Folgen zurück und betrachten die Partialsummen $s_m, s_{m'}$:

$$|s_{m'} - s_m| = \left| \sum_{k=n_0}^{m'} a_k - \sum_{k=n_0}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{m'} a_k \right| < \varepsilon \text{ laut Cauchy-Kriterium.}$$

(ii) Aus i) und der Definition für absolute Konvergenz folgt unmittelbar die Aussage.

(iii) klar, da $\left| \sum_{k=m+1}^{m'} a_n \right| \leq \sum_{k=m+1}^{m'} |a_n|$ nach der Dreiecksungleichung □

Beispiel (Harmonische Reihe) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert gegen „∞" und erfüllt das Cauchy-Kriterium nicht, da für $m = 2^p$ und $m' = 2^{p+1}$ mit $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$s_{m'} - s_m = \sum_{k=1}^{m'} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=(2^p)+1}^{(2^{p+1})} \frac{1}{k} = \frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} \cdots \frac{1}{2^p+2^p} \geq \frac{2^p}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}$$

⇒ Da p und damit m, m' beliebig groß gewählt werden können, kann $|s_{m'} - s_m|$ nicht unter $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ gedrückt werden:

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

Durch Induktion lässt sich überprüfen, dass $s_{(2^p)} \geq \frac{1}{2}(p+1)$ für $p \in \mathbb{N}$, das heißt, die monoton wachsende Folge der Partialsummen s_n wächst unbeschränkt und wir haben bestimmte Divergenz gegen „∞" (Divergenz der harmonischen Reihe).

Definition 4.5 (alternierende Reihen)
Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* alternierend, *wenn für* $k \in \mathbb{N} : a_k \cdot a_{k+1} < 0$.

Satz 4.6 (Leibnizkriterium)
Eine alternierende Reihe, für die die Beträge $|a_k|$ *eine monoton fallende Nullfolge bilden, ist konvergent. Für den Grenzwert einer konvergenten alternierenden Reihe gilt:* $s^* \in \,]a_0, a_0 + a_1[$ *oder* $s^* \in \,]a_0 + a_1, a_0[$

Beweis: O.B.d.A. kann angenommen werden, dass $a_0 > 0$. Andernfalls betrachten wir eine Reihe $s' = \lim_{n\to\infty} s'_n$, mit $s'_n = s_{n+1}$ oder, anders ausgedrückt, lassen wir einfach den ersten Summanden weg, da das Fehlen eines Summanden nicht das Konvergenzverhalten beeinflusst (wohl aber den Grenzwert!).

So folgt nämlich $\forall k \in \mathbb{N} : a_{2k} > 0 > a_{2k+1}$.

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{a_{2k+1} + a_{2k+2}}_{\leq 0,\text{ wegen der Monotonie von } |a_k|} \leq s_{2k} \leq s_{2k-2} \leq \cdots \leq s_0 = a_0$$

Die $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ bilden eine monoton fallende Teilfolge der $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + \underbrace{a_{2k} + a_{2k+1}}_{\geq 0,\text{ wegen der Monotonie von } |a_k|} \geq s_{2k-1} \geq s_{2k-3} \geq \cdots \geq s_1 = a_0 + a_1$$

Also bilden $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Teilfolge.

Es gilt $s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq a_0$ und $s_{2k} = s_{2k-1} + a_{2k} \geq s_{2k-1} \geq a_0 + a_1$. Es existiert wegen monotoner Konvergenz sowohl $s_0^* = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k} \in]a_0 + a_1, a_0[$ wie auch $s_1^* = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1} \in]a_0 + a_1, a_0[$.

Nach den Grenzwertsätzen ist:

$$0 = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}(s_{2k} - s_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_{2k} - \lim_{k\to\infty} s_{2k-1} = s_0^* - s_1^* \Longrightarrow s_0^* = s_1^* = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \in]a_0 + a_1, a_0[$$

□

Beispiel (Wichtiger Vertreter für das Leibnizkriterium)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \cdots = 0.6931\ldots = \ln(2)$$

Bemerkung (Warnung) Das Leibnizkriterium ist nicht resistent gegenüber einer Umordnung der Reihe. Das betrifft natürlich nicht endliche Vertauschungen.

Satz 4.7 (Umordnungssatz)
Eine Reihe ist genau dann absolut konvergent, falls $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall J \subseteq \mathbb{N} : \sum_{j\in J} |a_j| < c$.

Bemerkung Diese Bedingung ist unabhängig von der Reihenfolge der Glieder, so dass für jede injektive Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auch die Reihe über $(a_{h(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und für ein bijektives sogar h gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{h(k)}$$

Beweis:

„⇒“ $\mathbb{R} \ni \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$ ist gegeben und jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$ hat ein maximales Element m, so dass:

$$\sum_{k\in J} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$$

„⇐“ $\exists c \in \mathbb{R}$ für alle endlichen $J \subseteq \mathbb{N}$, so dass $\sum_{j\in J} |a_j| \leq c$. Also wähle bestimmte $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, denn dann ist $\sum_{j\in J} |a_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leq c$. Die monoton steigenden Partialsummen haben eine obere Schranke und damit auch einen Grenzwert.

Zur Behauptung der Bemerkung

Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut konvergent ist, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_ε, sodass $\sum_{n_\varepsilon < n\in\mathbb{N}} |a_n| < \varepsilon$. Da weiterhin h eine Bijektion ist, gibt es eine eindeutige Umkehrfunktion h^{-1}. Definiere

$$\tilde{n}_\varepsilon = h^{-1}(\max\{h((i)_{i=1}^{n_\varepsilon})\}) = h^{-1}(\max\{h(1), h(2), \ldots, h(n_\varepsilon)\}) = \operatorname{argmax}\{h(j) | j = 1, \ldots, n_\varepsilon)\}$$

Nun betrachte die Differenz der Partialsummen, für $n \geq \tilde{n}_\varepsilon$:

$$|s_n - \tilde{s}_n| = \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n} a_n - \sum_{k=1}^{n} a_{h(n)} \right|}_{\forall i \leq n_\varepsilon \text{ tauchen } a_i \text{ sowohl positiv, als auch negativ auf.}} \leq \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$$

Nun da $s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$ und $\tilde{s}_n \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{s}$ folgt sofort:

$$|s_n - \tilde{s}_n| \xrightarrow{n\to\infty} |s - \tilde{s}| < \varepsilon \Rightarrow s = \tilde{s}$$

□

Beispiel (allgemeine harmonische Reihe) Wir fügen eine weitere Konstante $c \in \mathbb{R}$ in die Bildungsvorschrift der harmonischen Reihe ein:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} = \begin{cases} \infty & \text{falls } c \leq 1 \\ s^* \in \,]0,\infty[& \text{falls } c > 1 \end{cases}$$

M.a.W. Für $c \leq 1$ divergiert die Reihe bestimmt gegen ∞. Für $c > 1$ gibt es einen positiven endlichen Grenzwert.

Beweis: $c \leq 1$: $\frac{1}{k^c} = \frac{k^{1-c}}{k} \geq \frac{1}{k}$, da $k^{1-c} \geq 1$ für $c \leq 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^c} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ wegen Divergenz der harmonischen Reihe.

$c > 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^p-1} \frac{1}{(2^p+j)^c} = \underbrace{1}_{p=0} + \underbrace{\frac{1}{2^c} + \frac{1}{3^c}}_{p=1} + \underbrace{\frac{1}{4^c} + \frac{1}{5^c} + \frac{1}{6^c} + \frac{1}{7^c}}_{p=2} + \cdots$$

$$\leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p}{(2^p)^c} = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{p(1-c)} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(c-1)}}\right)^p$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p}{(2^p)^c} = \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \Bigg(\overbrace{\frac{1}{2^{c-1}}}^{q}\Bigg)^p}_{\text{geom. Reihe}} = \sum_{p=0}^{\infty} q^p = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{c-1}}} = \frac{2^{c-1}}{2^{c-1}-1} < \infty$$

M.a.W. Die Partialsummen $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^c}$ sind monoton steigend und beschränkt, also existiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} < \infty$ $\square$

Bemerkung

(i) Aus dem Cauchy-Kriterium folgt für $m = n+1$, dass: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon$. M.a.W. $|a_k|$ müssen eine Nullfolge bilden für Konvergenz. Dies ist ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium, wie am Beispiel der gewöhnlichen harmonischen Reihe zu sehen ist.

(ii) Allgemein konvergieren Reihen $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, wenn die Beträge $|a_k|$ schneller fallen als $\frac{1}{k}$, d.h. wie Potenzen $\frac{1}{k^c}$ für $c > 1$.

Bemerkung (bedingte Konvergenz) Eine Reihe heißt bedingt konvergent, falls sie konvergent aber nicht absolut konvergent ist. Riemann hatte gezeigt, dass es für jede bedingt konvergente Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$ und weiter für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt: $s = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{(h(i))}$.

Bemerkung (zu weiteren Konvergenzkriterien) Die meisten Konvergenzkriterien stellen die stärkere Eigenschaft der absoluten Konvergenz sicher.

Satz 4.8 (Konvergenzkriterien)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ muss absolut konvergieren und somit einen Grenzwert haben, falls sie eines der folgenden Kriterien erfüllt:

(i) Majorantenkriterium: $|a_k| \leq b_k\ \forall k$ *mit* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$

(ii) Quotientenkriterium: $q = \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(iii) Wurzelkriterium: $r = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

Beweis:

(i) Partialsummen $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b \in \mathbb{R}$ sind durch die obere Schranke b beschränkt und monoton wachsend, daraus folgt die absolute Konvergenz.

(ii) Betrachte $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-q)$ und $n > n_\varepsilon$, so dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \tilde{q} = q + \varepsilon = \tfrac{1}{2}(1+q) < 1$$

Dann gilt für $n \geq n_\varepsilon$, dass

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}|a_{n-1}| \leq \tfrac{1}{2}(1+q)|a_{n-1}| \leq \cdots \leq \left[\tfrac{1}{2}(1+q)\right]^{n-n_\varepsilon}|a_{n_\varepsilon}| = \tilde{q}^n \cdot \left(\frac{|a_{n_\varepsilon}|}{\tilde{q}^{n_\varepsilon}}\right)$$

M.a.W. $|a_n|$ fällt mindestens so schnell wie die geometrische Reihe. Da nun aber $\tilde{q} < 1$ folgt damit bereits die Konvergenz.

(iii) Betrachte wieder ein spezielles $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-r)$ und $n > n_\varepsilon$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \tilde{r} = r + \varepsilon = \tfrac{1}{2}(1+r) < 1$$

Nun potenzieren wir den Term $\sqrt[n]{|a_n|}$ mit n:

$$|a_n| = \tilde{r}^n$$

und damit gilt wieder wie bei ii), das die Folge $|a_n|$ mindestens so schnell wie die geometrische Reihe fällt.

Damit ist alles gezeigt. □

Bemerkung (Warnung) Sowohl für das Wurzelkriterium als auch für das Quotientenkriterium gilt, dass, falls $r > 1 < q$, die Reihe divergent ist. **Aber** wenn $r = 1$ oder $q = 1$ gilt, ist es nicht möglich, eine Aussage über die Konvergenz der entsprechenden Reihe zu treffen.

§5 b-adische Zahlendarstellung und Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

- $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ sei als Basis der Zahldarstellung fixiert
- Ziffernsymbole 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, ...
- Symbol und Wert gleichgesetzt, $A \widehat{=} 10$, $B \widehat{=} S(A) = A + 1 = 11$

Definition 5.1 (b-adische Zahldarstellung)
Es seien $z_{-m}, z_{-m+1}, \ldots, z_0, z_1, z_2, \ldots$ gegeben, mit $z_j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ bzw. das entsprechende Ziffernsymbol. Die Reihe

$$(z_{-m}z_{-m+1}\ldots z_0, z_1z_2\ldots)_b \overset{Def}{=} \sum_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-j}$$

wird als b-adische Zahlendarstellung bezeichnet.

Bemerkung

- Sinnvollerweise ist $z_{-m} \neq 0$, falls $m > 0$
- Die Darstellung heißt endlich, falls $z_j = 0$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$
- Darstellungen mit $z_j = b - 1$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$ werden ausgeschlossen.

Lemma 5.2 (Konvergenz der b-adische Zahldarstellung)
Für $m \in \mathbb{N}$ und $z_j \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ ist $\sum_{j=-m}^{\infty} z_j b^- j$ absolut konvergent.

Beweis: Dieser Beweis kann über das Majorantenkriterium geführt werden:

Da $z_j \leq b - 1$ folgt $z_j b^{-j} \leq (b-1)b^{-j}$ und $\sum_{j=-m}^{\infty}(b-1)b^{-j} = (b-1)b^{-m}\sum_{j=0}^{\infty} b^{-j} = \frac{(b-1)b^{-m}}{1-b^{-1}} = b^{m+1}$ □

Satz 5.3 (Eindeutigkeit der b-adische Zahldarstellung)
Jedes $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-j}, z_j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, z_{-m} \neq 0, z_j \neq b - 1$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$.

Beweis: Als erstes muss die **Existenz** einer Darstellung $\forall x \in \mathbb{R}$ sichergestellt werden:

$(b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ wächst über alle Grenzen $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x < b^k \Rightarrow$ es gibt ein minimales $k = m+1$ mit $b^m \leq x < b^{m+1} \Rightarrow$ $1 \leq b^{-m}x < b$

Als erstes setze: $z_{-m} = \lfloor b^{-m}x \rfloor \in \{1, \ldots, b-1\} \Rightarrow b^{-m}x - z_{-m} \in [0,1[\Rightarrow 0 \leq x - z_{-m}b^m < b^m$

Wenn $z_{-m}, \ldots, z_k$ schon bestimmt sind, mit $0 \leq x_k := x - \sum_{j=-m}^{k} z_j b^{-k} \Rightarrow 0 \leq b^{k+1}x_k < b$,
dann setze als Nachfolger: $z_{k+1} = \lfloor b^{k+1}x_k \rfloor \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.

$\Rightarrow x_k b^{k+1} - z_{k+1} \in [0,1[\Rightarrow 0 \leq x_{k+1} = x_k - z_{k+1}b^{-(k+1)} \leq b^{-k-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 \Rightarrow x = \sum\limits_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-1} \Rightarrow$ Existenz der Darstellung gesichert

Zur Eindeutigkeit:

Sei $(y_j)_{j=-m}^{\infty} = (y_{-m}, \ldots y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots)$ eine weitere Darstellung von x (wobei führende Nullen für gleiche Länge vor dem Komma zulässig seien). Sei k der kleinste Index mit $z_k \neq y_k$, so dass für die *partielle Summe* gilt:

$$\sum_{j=-m}^{k-1} (y_j - z_j)b^{-j} = 0, \text{ wobei } \forall j \in \{-m, -m+1, \ldots, k-2, k-1\} \ : \ y_j - z_j = 0$$

Wir schauen wir uns nur noch die Alternativdarstellung ab dem Index k an. O.B.d.A. gehen wir davon aus, dass $z_k > y_k$ oder andernfalls vertausche einfach gleichzeitig die Bezeichnung aller z_j gegen y_j und umgekehrt, denn dann gilt sicherlich $z_k > y_k$:

$$0 = x - x = \sum_{j=0}^{\infty}(y_{j+k} - z_{j+k})b^{-j} = \underbrace{(y_k - z_k)}_{\leq -1, \text{ da } (y_k, z_k) \in \{0,1,\ldots,b-1\}^2 \subseteq \mathbb{N}^2} + \sum_{j=1}^{\infty}(y_{j+k} - z_{j+k})b^{-j} \leq -1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}(b-1)b^{-j}}_{=(b-1)\cdot\left(\frac{1}{1-b^{-1}} - b^0\right)} = -1 + 1 = 0$$

Gleichheit muss gelten, aber nur möglich wenn: $z_k = y_k + 1 \cdot (b-1)$ und $y_{j+k} - z_{j+k} = b-1$, das heißt $y_{j+k} > b - 1 \forall j \in \mathbb{N}$, das heißt: Die y-Darstellung ist unzulässig (d.h., es gibt kein Symbol für $y_{j+k} > b-1$ in dieser b-adischen Darstellung). Also muss $z_k = y_k$ was wiederum impliziert, dass es kein kleinsten Index k gibt, mit $y_k \neq z_k$. □

Bemerkung (Konvergenzverhalten und Grenzwert einer Reihe)
Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass endliche Additionen von Summanden nicht das Konvergenzverhalten einer Reihe verändert, aber ihren Grenzwert, falls die Reihe konvergiert! Hier im Beweis zur Eindeutigkeit der Darstellung einer reellen Zahl x wurde dieses Wissen auf die geometrische Reihe angewendet. Zur Erinnerung, die geometrische Reihe und ihr Grenzwert, falls $|q| < 1$:

$$c\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{c}{1-q}$$

Im Beweis tauchte jedoch folgende von der Geometrischen nur leicht variierte Reihe auf, welche von einem Index $j = 1$ anstelle $j = 0$ startet:

$$c\sum_{j=1}^{\infty}\left(b^{-1}\right)^j = c\sum_{j=0}^{\infty}\left(b^{-1}\right)^j - cb^0 = c\left(\frac{1}{1-b^{-1}} - b^0\right) = \frac{c}{b-1} \neq \frac{1}{1-b^{-1}}$$

Aufgrund dessen wurde im Beweis, in derselben Zeile, der Index der Reihe vor der Abschätzung auf 0 gesetzt. Sonst hätte am Ende nicht nur cb^0 sondern eine ganze partielle Summe abgezogen werden müssen und das ist weder nötig noch elegant!

Bemerkung (Abzählbarkeit)
Eine Menge N wird als abzählbar bezeichnet, falls sie endlich, also $|N| < \infty$ oder gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen ist. Letzteres gilt genau dann wenn $\exists h : \mathbb{N} \to N$, mit h ist bijektiv. Andernfalls ist N überabzählbar.

Dies bedeutet jedoch nicht, dass alle überabzählbaren Mengen isomorph ineinander überführbar wären. Zum Beispiel ist die Potenzmenge der Potenzmenge der reellen Zahlen $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ überabzählbar und mächtiger als $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (die Potenzmenge der reellen Zahlen). Diese ist wiederum mächtiger als die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ selbst, welche auch überabzählbar sind (Beweis folgt später).

Nun sollte wohl schon vorstellbar sein, dass dieses Spiel der Potenzmengen beliebig fortgesetzt werden kann.

M.a.W. Es gibt unendlich viele Mächtigkeiten.

Lemma 5.4 (Diagonalargument)
M sei eine Menge mit mindestens 2 Elementen. Dann ist $M^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in M \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ überabzählbar.

Beweis: Annahme: $M^{\mathbb{N}}$ ist abzählbar. D.h., $\exists h : \mathbb{N} \to M$, so dass $\forall x \in M \ \exists! \ n \in \mathbb{N} : \ h(n) = x$. Also können alle Elemente der Menge $M^{\mathbb{N}}$ als Folge aufgereiht werden: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (h(n))_{n\in\mathbb{N}}$, so dass:

$M^{\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei ein Folgenglied, der $M^{\mathbb{N}}$-Folge, $x_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M ist.

$$m_0, m_1 \in M, \text{ mit } m_0 \neq m_1$$

$$z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ mit } z_k = \begin{cases} m_0 & \text{, falls } x_{k,k} \neq m_0 \\ m_1 & \text{, falls } x_{k,k} = m_0 \end{cases}$$

Das ist letztlich ein Widerspruch zur getroffenen Annahme, da die Folge z an der k. Stelle nicht mit der k. Folge x_k übereinstimmt, so dass $z \neq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die Idee als Matrix skizziert:

$$\begin{array}{lcllllll}
x_1 & = & \underline{0}, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots \\
x_2 & = & 0, & \underline{0}, & 0, & 0, & 1, & \dots \\
x_3 & = & 0, & 0, & \underline{0}, & 1, & 1, & \dots \\
x_4 & = & 0, & 0, & 1, & \underline{1}, & 1, & \dots \\
x_5 & = & 0, & 1, & 1, & 1, & \underline{1}, & \dots \\
 & \vdots & & & & & & \\
\hline
z & = & 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & \dots
\end{array}$$

Wobei hier der Übersicht wegen $m_0 = 0$ und $m_1 = 1$ gesetzt ist. □

Satz 5.5 (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)
$\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Beweis: $\mathbb{R}$ enthält die überabzählbare Teilmenge $\left\{ \sum\limits_{j=0}^{\infty} z_j \, 10^{-j} \,\middle|\, z_j \in \{0, 1 \dots 8\} \right\} \cong \{0, 1, \dots, 8\}^{\mathbb{N}}$ □

Bemerkung Die Ziffer 9 wurde aus dieser Konstruktion ausgeschlossen, um das Problem der 9er-Perioden zu vermeiden.

Satz 5.6 (Periodizität der Darstellung)
Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist genau dann rational, wenn die b-adische Zahlendarstellung bzgl. jedes $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ periodisch im folgenden Sinne ist:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ p \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0 : z_{n+p} = z_n$$

Die Schreibweise verändert sich in folgender Weise:

$$x = z_{-m} z_{-m+1} \dots z_{-1} z_0, z_1 z_2 \dots z_{n_0-1} z_{n_0} z_{n_0+1} z_{n_0+2} \dots z_{n_0+p-1} z_{n_0+p} \dots z_{n_0+2p-1} z_{n_0+2p} \dots$$
$$x = z_{-m} z_{-m+1} \dots z_{-1} z_0, z_1 z_2 \dots z_{n_0-1} \overline{z_{n_0} z_{n_0+1} z_{n_0+2} \dots z_{n_0+p-1}}$$

Beispiel $\frac{1}{3} = 0,33\dots3\dots = 0,\overline{3}$

Beweis:

„⇐“ Für gegebene periodische Darstellung gilt:

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{j=-m}^{n_0-1} z_j b^{-j} + \left(\sum_{j=n_0}^{n_0+p-1} z_j b^{-j} \right) \underbrace{(1 + b^{-p} + b^{-2p} + \dots)}_{= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (b^{-p})^i} \\
&= \sum_{j=-m}^{n_0-1} z_j b^{-j} + b^{-n_0} \left(\sum_{j=0}^{p-1} z_{j+n_0} b^{-j} \right) \left(\frac{1}{1-b^{-p}} \right) \\
&= \frac{b^{-n_0} \left(\sum_{j=0}^{p-1} z_{j+n_0} b^{-j} \right)}{1-b^{-p}} + \sum_{j=-m}^{n_0-1} z_j b^{-j}
\end{aligned}$$

Letzteres ist eine Summe von rationalen Zahlen und somit gilt: x ist auch rational.

„⇒“ Betrachten wir $x = \frac{z}{n}$, für $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ und eine gegebene Basis b, dann können wir sukzessive die Potenzen b^k, für $k \in \{1, 2, \dots\}$, durch n dividieren. Es ergibt sich jeweils ein Rest zwischen 0 und $n-1$.

Irgendwann, d.h., für ein erstes Paar b^k und b^{k+p}, tritt erstmals derselbe Rest auf.

$$b^k = l_1 \cdot n + r, \; b^{k+p} = l_2 \cdot n + r$$

D.h., es gilt für ein $l \in \mathbb{N}$, dass:

$$\begin{aligned}
b^{k+p} - b^k = l_2 \cdot n + r - (l_1 \cdot n + r) &= l \cdot n = b^k(b^p - 1) \\
(b^{k+p} - b^k) &= (\underbrace{l_1 - l_2}_{l \in \mathbb{Z}})n
\end{aligned}$$

Nun erweitern wir unsere Zahl x um eine „effektive 1“:

$$\begin{aligned}
x \cdot 1 &= \frac{l \cdot z}{l \cdot n} = \frac{l \cdot z}{b^k(b^p-1)} = \frac{(b^p-1) \cdot u + v}{(b^p-1) \cdot b^k} \qquad \text{, für } 0 \leq v < (b^p - 1) \\
&= \frac{(b^p-1)u}{(b^p-1)b^k} + \frac{v}{b^k} \cdot \underbrace{\frac{1}{(b^p-1)}}_{\text{Grenzwert der geometrischen Reihe}} = \frac{u}{b^k} + \frac{v}{b^k} \sum_{j=1}^{\infty} (b^p)^{-j}
\end{aligned}$$

Nun wissen wir aber auch, dass sowohl $u \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, als auch $v \in \{1, 2, \dots, b^p - 1\} \subseteq \mathbb{Z}$ jeweils eine b-adische Zahlendarstellung haben müssen:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{j=-m}^{0} z_j b^{-j} \\
v &= \sum_{j=0}^{p-1} \hat{z}_j b^j = \sum_{j=-p+1}^{0} \hat{z}_j b^{-j}
\end{aligned}$$

Diese Darstellungen setzen wir nun abermals in unsere bereits um 1 effektiv erweiterte Gleichung ein:

$$x = \sum_{j=-m}^{0} z_j b^{-j-k} + \left(\sum_{j=-p+1}^{0} \hat{z}_j b^{-j-k}\right) \sum_{j=1}^{\infty} (b^p)^{-j} = \sum_{j=-m+k}^{k} z_{j-k} b^{-j} + \left(\sum_{j=-p+1}^{0} \hat{z}_j b^{-j-k-p}\right) \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} (b^p)^{-j}}_{\text{Beachte Indexshift!}}$$

$$= \sum_{j=-m+k}^{k} z_{j-k} b^{-j} + \left(\sum_{j=0}^{p-1} \hat{z}_{j-p+1} b^{-j-k-1}\right) \sum_{j=0}^{\infty} b^{-pj} = \underbrace{\sum_{j=-m+k}^{k} z_{j-k} b^{-j}}_{=\frac{u}{b^k}} + \underbrace{b^{-1-k}\left(\sum_{j=0}^{p-1} \hat{z}_{j-p+1} b^{-j}\right) \sum_{j=0}^{\infty} b^{-pj}}_{=\frac{v}{b^k(b^p-1)}}$$

$$= \sum_{j=-m+k}^{k} z_{j-k} b^{-j} + \left(\sum_{j=0}^{p-1} \hat{z}_{j-p+1} b^{-j}\right) \sum_{j=0}^{\infty} b^{-pj-k-1}$$

$$= \sum_{j=-m+k}^{k} z_{j-k} b^{-j} + \sum_{j=0}^{p-1} \hat{z}_{j-p+1} b^{-j} \left(\frac{1}{b^{k+1}} + \frac{1}{b^{p+k+1}} + \frac{1}{b^{2p+k+1}} + \dots\right)$$

$$= \sum_{j=-m+k}^{k} z_{j-k} b^{-j} + \left(\sum_{j=k+1}^{p+k} \hat{z}_{j-p-k} b^{-j} + \sum_{j=p+k+1}^{2p+k} \hat{z}_{j-2p-k} b^{-j} + \sum_{j=2p+k+1}^{3p+k} \hat{z}_{j-3p-k} b^{-j} + \dots\right)$$

Damit haben wir $z_{-m+k}, z_{-m+k+1}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots, z_k, \overline{z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+p+1}}$, mit $z_{k+j} \mathrel{\widehat{=}} \hat{z}_{j-p-k}$. Durch die Multiplikation der Summe $\sum_{j=0}^{p-1} \hat{z}_{j-p+1} b^{-j}$ mit den $\frac{1}{b^{pj}}$ erhalten wir eine lückenlose Reihe von Summanden $z_{k+j} b^{-j+k}$, wobei für die z_{k+j} gilt:

$$z_{k+j} = z_{k+j+p} = z_{k+j+2p} = z_{k+j+3p} = \dots$$

M.a.W. Die Ziffern treten periodisch im Abstand von p auf. □

§6 Anwendung Wurzelkriterium, Potenzreihen

Lemma 6.1 (Eigenschaften der Wurzelfunktion)

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *falls* $a > 0$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(n)|} = 1$ *für* $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j x^j$ *ein Polynom und* $P(n) \neq 0$.

Beweis:

(i) Dazu definiere eine Folge über folgende Vorschrift $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ und diese erfüllt

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n = (1 + x_n)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_n^j \geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) x_n^2 \geq \frac{1}{2} n(n-1) x_n$$

Nun teilen wir $n \geq \frac{1}{2} n(n-1) x_n$ beidseitig durch n:

$$1 \geq \frac{1}{2}(n-1) x_n \iff x_n \leq \frac{2}{(n-1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(ii) Wieder definieren wir eine Folge $x_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ und gehen per Fallunterscheidung vor:

Fall 1: $a > 1$ Die Idee ist dieselbe wie eben:

$$x_n = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a} - 1 > 0 \Rightarrow a = (x_n + 1)^n \geq n x_n$$
$$\Rightarrow 0 \leq x_n \leq \frac{a}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Fall 2: $a < 1$ Nun ist $a < 0$, aber dann ist $\tilde{a} = \frac{1}{a} > 1$:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \overset{\text{Fall 1}}{=} \frac{1}{1} = 1$$

Fall 3: Offensichtlich gilt $\sqrt[n]{1} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$

(iii) O.B.d.A sei $c_m \neq 0$, sonst kann m durch $m-1$ ersetzt werden:

$$\begin{aligned} P(n) &= c_m n^m \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{c_j}{c_m} n^{j-m} \right) \\ &= c_m n^m \left(1 + \frac{c_{m-1}}{c_m}\frac{1}{n} + \frac{c_{m-2}}{c_m}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{c_0}{c_m n^m} \right) = c_m \cdot n^m \cdot Q(n) \end{aligned}$$

$Q(n)$ ist eine rationale Funktion und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} Q(n) = 1 + \frac{c_{m-1}}{c_m}\frac{1}{n} + \frac{c_{m-2}}{c_m}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{c_0}{c_m n^m} \to 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

also gilt für $n \geq n_0$, dass $\frac{1}{2} \leq Q(n) \leq 2$, sodass:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{\frac{1}{2}|c_m|} (\sqrt[n]{n})^m \right]}_{=1 \text{ nach (ii)}} \leq \lim_{n\to\infty} |P(n)|^{\frac{1}{n}} \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{2|c_m|} (\sqrt[n]{n})^m \right]}_{=1 \text{ nach (ii)}}$$

□

Korollar 6.2 (Beziehung Reihen und Polynome)
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ erfüllt genau dann das Wurzelkriterium, wenn dies für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P(n)/Q(n)$ mit beliebigen Polynomen $P(n)$ und $Q(n)$ gilt.

Beweis: $\tilde{a}_n = a_n(P(n)/Q(n))$ erfüllt $\tilde{a}_n Q(n) = a_n P(n) \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} |\tilde{a}_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, da $\frac{\sqrt[n]{Q(n)}}{\sqrt[n]{P(n)}} \to \frac{1}{1}$. □

Interpretation: Potenzen des Index n spielen für Konvergenz nach Wurzelkriterium keine Rolle.

Satz 6.3 (Vergleich von Quotienten- und Wurzelkriterium)
(i) $r \leq q$ mit $r = q$, falls $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

(ii) $r > 1$ impliziert Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

Beweis: Beachte geschachtelte Grenzprozesse:

(i) Nach Definition von q existiert für alle ε ein n_0, so dass: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q + \varepsilon$ für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |a_n| < |a_n|(q+\varepsilon)^{n-n_0} \\ &\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{|a_n|}(q+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} = \sqrt[n]{|a_n|}(q+\varepsilon)^{\frac{1-n_0}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot (q+\varepsilon) \geq r \end{aligned}$$

Letzte Ungleichung gilt für beliebiges ε, so dass notwendigerweise $r \leq q$.

Falls $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ gilt für $\varepsilon > 0$ und entsprechendes n_0:

$$\begin{aligned} &|a_n| = |a_{n-1}| \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \geq |a_{n-1}|(q-\varepsilon) \geq \ldots \geq |a_{n_0}|(q-\varepsilon)^{n-n_0} \\ &\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n| \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}(q-\varepsilon)^{\frac{1-n_0}{n}} = (q-\varepsilon) \leq r \\ &\Rightarrow q \leq r \Rightarrow q = r, \text{ da } r \leq q \text{ bereits bewiesen.} \end{aligned}$$

(ii) Falls $r > 1$ gilt für beliebig große $n \in \mathbb{N}$, dass $\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow |a_n| > 1$ unendlich oft $\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\Rightarrow$ Divergenz. $\square$

Bemerkung (Schlussfolgerung) Das Wurzelkriterium ist genauer als das Quotientenkriterium, da r die durchschnittliche Reduktion der Beträge der Glieder $|a_n|$ misst. Dem gegenüber verlangt $q < 1$ eine Reduktion in jedem Schritt, das heißt von Glied zu Glied. Hauptanwendungsbereich sind die sog. *Potenzreihen.*

Definition 6.4 (Potenzreihe)
Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge von Koeffizienten und $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Variable heißt

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ oder } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_n)^n \text{ für festes } x_0 \in \mathbb{R}$$

eine Potenzreihe (am Punkt x_0).

Bemerkung $P(x)$ kann als Polynom wahrgenommen werden $\iff a_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.5 (Konvergenzradius von reellen Potenzreihen)
Falls $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, dann konvergiert die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut für alle $x \in \,]-\delta, \delta[$, wobei der Konvergenzradius δ gegeben ist durch $\delta = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{falls } r > 0 \\ \infty & \text{falls } r = 0 \end{cases}$.

In letzteren Fall konvergiert $P(x)$ absolut für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Anwendung des Wurzelkriterium auf $P(x)$ ergibt folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} 1 > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} &= \limsup_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= |x| r \Longleftarrow \text{ falls } r = 0 \text{ und } |x| \in \mathbb{R} \text{ oder } r > 0 \text{ und } |x| < \frac{1}{r} = \delta \end{aligned}$$

Beispiel (Potenzreihen) $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $P(0) = a_0 0^0 = a_0$, $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

(i) $a_k = 1$ für $k \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k \Rightarrow q = r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow$ Konvergenzradius $\delta = \frac{1}{1} = 1$

- $|x| < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz gegen $\frac{1}{1-x}$
- $x = 1 \Rightarrow$ Bestimmte Divergenz gegen ∞
- $x = -1 \Rightarrow$ unbestimmte Divergenz, da $a_k = (-1)^k$ nicht Nullfolge
- $x > 1 \Rightarrow$ Bestimmte Divergenz gegen ∞
- $x < 1 \Rightarrow$ Unbestimmte Divergenz.

Also gilt für $|x| < 1$ absolute Konvergenz, für $|x| > 1$ Divergenz und für $|x| = 1$ Divergenz bestimmt oder unbestimmt.

(ii) $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}(-1)^{k-1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$
Positiver Konvergenzradius $\delta = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

- $|x| < \delta = 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz gegen $\ln(1+x) \Longleftarrow$ später zu zeigen.
- $x = 1 \Rightarrow$ alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots = \ln(2)$
- $x = -1 \Rightarrow$ harmonische Reihe $\Rightarrow$ Divergenz gegen $-\infty$
- $x < -1 \Rightarrow$ bestimmte Divergenz gegen $-\infty$
- $x > 1 \Rightarrow$ unbestimmte Divergenz

(iii) $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$
Nach Quotientenkriterium $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow r = q = 0 \Rightarrow \delta = \infty$, das heißt $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert $P(x)$ absolut gegen einen Wert, den man mit $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ bezeichnet. Wie wir gleich zeigen, gilt die Funktionalgleichung: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),\ \exp(x)\exp(-x) = 1,\ \exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0,\ \exp(x) > 0$

Bemerkung Die Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius bilden einen linearen Vektorraum.

Lemma 6.6 (lineare Verknüpfung von Potenzreihen)
Falls $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ die Konvergenzradien δ_1, δ_2 haben, dann hat die Linearkombination: $R(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$ für beliebige Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ einen Konvergenzradius $\delta \geq \frac{1}{2}\min(\delta_1, \delta_2) > 0$

Beweis:

$$\begin{aligned} r = \limsup \sqrt[k]{|\alpha a_k + \beta b_k|} &\leq \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|\alpha||a_n|} + \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\beta||b_n|} \\ &= \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha|}}_{=1} \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\beta|}}_{=1} \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|b_k|} \\ &= \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\ \text{, da } \delta_1 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}} \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $\sqrt[k]{|a| + |b|} \leq \sqrt[k]{|a|} + \sqrt[k]{|b|}$, da nach bin. Lehrsatz

$$|a| + |b| \leq (\sqrt[k]{|a|} + \sqrt[k]{|b|})^k = |a| + |b| + \sum_{j=1}^{k-1} |a|^{\frac{j}{k}} |b|^{\frac{k-j}{k}}$$

$$r \leq \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \Longrightarrow \delta = \frac{1}{r} \geq \frac{1}{\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}} \geq \frac{1}{2}\min(\delta_1, \delta_2)$$

□

Bemerkung Mit etwas mehr Aufwand kann auch die doppelt so gute Abschätzung $\delta \geq \min(\delta_1, \delta_2)$ gezeigt werden.

Innerhalb ihres absoluten Konvergenzbereiches können Potenzreihen beliebig genau durch endliche Partialsummen angenähert werden.

Satz 6.7 (Restgliedabschätzung)
Hat $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den positiven Konvergenzradius $\delta > 0$, dann existiert für jedes $n > 0$ und $\tilde{\delta} < \delta$ ein $c \in \mathbb{R}$, so dass: $|P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| \leq c|x|^n$ für $x \in [-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}] \subset]-\delta, \delta[$

Beweis: Wir betrachten die Differenz des Polynoms von der Potenzreihe:

$$\left|P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||x|^k \leq |x|^n \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||x|^{k-n} = |x|^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}\tilde{\delta}^k|}_{= c \in \mathbb{R},\ \text{da die Reihe absolut konvergiert}} \leq |x|^n c$$

Damit ist alles gezeigt. □

Korollar 6.8 (Potenzreihen am Ursprung)
Falls $P(x) \neq 0$ positiven Konvergenzradius hat, dann existiert ein $\hat{\delta} \in]0, \tilde{\delta}[\subset]0, \delta[$, so dass $x \in]-\hat{\delta}, \hat{\delta}[\Longrightarrow P(x) \neq 0 \vee (x = 0 \wedge a_0 = 0)$

Beweis: Laut dem Satz über die „Restgliedabschätzung“ und der inversen Dreiecksungleichung gilt

$$|P(x)| \geq |a_{n-1} x^{n-1}| - c|x^n|$$

Wobei a_{n-1} der erste nicht verschwindende Koeffizient von $P(x)$ ist:

$$|P(x)| \geq |x|^{n-1}(|a_{n-1}| - c|x|), \text{ falls } |x| \neq 0 \wedge |x| < \hat{\delta} = \min(\tilde{\delta}, \frac{|a_{n-1}|}{2c})$$

Also hat die Potenzreihe $P(x)$ in einem Abstand $\hat{\delta}$ um $x_0 = 0$ herum keine Nullstelle. □

Satz 6.9 (Identitätssatz von Potenzreihen)
Falls $P(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(x - x_0)^k$ und $Q(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k(x - x_0)^k$, mit demselben Entwicklungspunkt x_0, einen positiven Konvergenzradius haben und an einer Nullfolge $x_n \to 0$ mit $0 \neq x_n$ übereinstimmen, das heißt $P(x_n) = Q(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Betrachte Differenz $R(x) = Q(x) - P(x) = (-1) \cdot P(x) + 1 \cdot Q(x)$. Diese Potenzreihe hat nach dem Satz über *lineare Verknüpfung von Reihen* einen positiven Konvergenzradius $\hat{\delta} \geq \frac{1}{2}\min(\delta_P, \delta_Q)$ und erfüllt damit $R(x_n) = Q(x_n) - P(x_n) = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in \,]-\hat{\delta}, \hat{\delta}[$.

Es sei nebenbei angemerkt, dass es einen Index n_0 gibt, sodass alle $x_{n>n_0} \in \,]-\hat{\delta}, \hat{\delta}[$, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Nun aber zurück zu $R(x)$ und hätte $R(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(b_k - a_k)x^k$ nicht verschwindende Koeffizienten bzw. $(b_k - a_k) = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann könnte es nach dem Korollar über *Potenzreihen am Ursprung* nicht auf der Nullfolge $0 \neq x_n \to 0$ verschwinden. Also muss gelten: $R(x) = 0$ mit $a_k = b_k$ für $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung (Interpretation) Durch Potenzreihen am Ursprung $x = 0$ entwickelbare Funktionen sind durch ihre Werte an einer abzählbaren Folge $x_n \to 0$ eindeutig definiert (Vergleiche: Polynominterpolation).

Definition 6.10 (Cauchy-Produkt)
Für zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ bezeichnet man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \in \mathbb{R}$ als das Cauchy-Produkt der beiden Reihen.

Frage: Unter welchen Bedingungen gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$?

Beispiel $a_k = \frac{x^k}{k!}, b_n = \frac{y^n}{n!}$ für $x, y \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \exp(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \exp(y)$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} = \frac{1}{n!}(x+y)^n \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y) \text{ definitionsgemäß.}
\end{aligned}$$

Vermutung: $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

Die **Antwort** liefert der folgende Satz.

Satz 6.11 (Konvergenz des Cauchy-Produktes)
Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren, dann konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt absolut und es gilt

$$(\sum_{n=0}^{\infty} c_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$$

Beweis: Zuerst zeigen wir die absolute *Konvergenz* der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$:

$$\sum_{i=0}^{n} |c_i| \leq \sum_{i=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right| \leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} |a_j| \cdot |b_{i-j}| \leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |a_i| \cdot |b_j| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| \sum_{j=0}^{n} |b_j| \leq \alpha \cdot \beta$$

Wobei $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\beta = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Damit haben wir die Konvergenz des Cauchy-Produktes.

Nun zeigen wir die *Identität* von:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right)$$

Dazu betrachte wir die Differenz:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j - \sum_{i=0}^{n} c_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right| = \left|\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j - \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=n-i+1}^{n} b_j\right|$$
$$\leq \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} |a_i| \sum_{j=n-i+1}^{n} |b_j| + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |a_i| \sum_{j=n-i+1}^{n} |b_j| \leq \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} |a_i|\beta + \alpha \sum_{j=n-i+1}^{n} |b_j| \leq \varepsilon\beta + \alpha\varepsilon$$

Die letzten Abschätzungen gelten, da beide Reihen absolut konvergent sind. Da nun ε beliebig klein gewählt werden kann folgt die Gleichheit und damit die Behauptung. $\square$

Bemerkung Es reicht sogar schon aus, wenn eine der Reihen absolut konvergiert und die andere lediglich bedingt, denn dann gilt immer noch die Identität. Jedoch kann dann nicht mehr sichergestellt werden, dass das Cauchy-Produkt absolut konvergiert.

Nun ist auch die Vermutung das $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ mithilfe der Aussage über das Cauchy-Produkt bestätigt.

IV Stetigkeit und Konvergenz

§1 Stetigkeit und Zwischenwertsatz

Motivation: Nullstellensuche

Sei $a < b, f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$, sonst beliebig. Suche $x^* \in]a,b[$ mit $f(x^*) = 0$.

Betrachte: $M = \{x \in]a,b[: f(x) \leq 0\}$ mit: $M \neq \emptyset$, weil $a \in M$
M ist durch b nach oben beschränkt $\implies$ Supremum existiert in $\mathbb{R}$: $x^* := \sup M \in [a,b]$
(analog gibt es $x_* = \inf\{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}$)

Nach Konstruktion und Definition des Supremums:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists \underline{x}, \overline{x} \in [a,b] : x^* - \varepsilon < \underline{x} \leq x^* \leq \overline{x} < x^* + \varepsilon \wedge f(\underline{x}) < 0 < f(\overline{x})$$

x^* ist Kandidat für eine Nullstelle. Aber gilt auch $f(x^*) = 0$?

Beispiel (i) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x & \text{, falls } x < 0 \\ 5 & \text{, falls } x = 0 \\ 2x & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$

$x^* = x_* = 0$, aber $f(0) = 5$.

(ii) $f(x) = 2x - 1, x_* = x^* = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 0$

(iii) $f(x) = 4x^3 - x, x_* = -\frac{1}{2}, x^* = \frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = 0 = f(\frac{1}{2})$

Forderung: Funktionswert in x sollte nicht zu stark von Funktionswerten nahe x abweichen.

Definition 1.1 (Stetigkeit)
$D \subset \mathbb{R}, x \in D, f : D \to \mathbb{R}$, *$f$ ist stetig in x genau dann wenn:*

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \underbrace{\forall y \in D : |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon}_{f(D\cap(x-\delta,x+\delta))\subset(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)}$$

f ist stetig (auf D), falls f an jedem $x \in D$ stetig ist.

Satz 1.2 (Stetigkeit von Potenzreihen)
Potenzreihen und Polynome sind stetig, genauer ist $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$, dann ist f stetig auf dem offenem Intervall $(-R, R)$

Beweis: Sei $x_0 \in (-R, R)$, dann definiere $\rho = \begin{cases} \frac{|x_0|+R}{2} & \text{, falls } R < \infty \\ |x_0| + 1 & \text{, falls } R = \infty \end{cases}$, damit ist $|x_0| < \rho < R$

Sei auch $x \in (-\rho, \rho)$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k - x_0^k) \\ &= (x - x_0) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\left(x^{k-1} + x^{k-2} x_0 + \cdots + x x_0^{k-2} + x_0^{k-1}\right)}_{k \quad \text{Summanden}} \end{aligned}$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \sum_{k_1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{k-1} |x|^j |x_0|^{k-1-j} \leq |x - x_0| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot k \cdot \rho^{k-1}}_{:=L}$$

z.Z.: $L < \infty$, mit Wurzelkriterium

$$\begin{aligned} \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k| k \rho^{k-1}} &= \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \sqrt[k]{|k|} \sqrt[k]{\frac{1}{\rho}} \cdot \rho \\ &= \frac{\rho}{R} < 1 \end{aligned}$$

Daher konvergiert die Reihe zu $L < \infty$, d.h. $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$ für $x \in (-\rho, \rho)$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle $\delta = \min\left(\rho - |x_0|, \frac{\varepsilon}{L+1}\right)$. Wenn also $|x - x_0| \leq \delta \implies x \in (-\rho, \rho)$ und somit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L \frac{\varepsilon}{L+1} \leq \varepsilon$$

□

Satz 1.3 (Nullstellensatz)
Seien $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann gibt es ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$.

Beweis: O.B.d.A.: $f(a) < 0 < f(b)$. Setze $x^* = \sup(M)$, $M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$. Dann ist entweder $f(x^*) = 0$ ✓,
oder $f(x^*) < 0$, oder $f(x^*) > 0$.

Annahme: $f(x^*) < 0$: Da x^* Supremum und $f(b) > 0$, gilt für jedes $x > x^* : f(x) > 0$. Andererseits gilt wegen Stetigkeit, dass für $|x - x^*| \leq \delta : |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon \implies f(x) < \varepsilon + f(x^*) < 0$ für $\varepsilon < \frac{1}{2}|f(x^*)|$. Das ist ein Widerspruch zu $f(x) > 0$.

Annahme: $f(x^*) > 0$: Da x^* Supremum gilt für alle $x > x^*$: $f(x) > 0$. Wegen Stetigkeit gilt, dass für alle $x < x^*$ mit $|x^* - x| < \delta : |f(x^*) - f(x)| < \varepsilon \implies f(x) > f(x^*) - \varepsilon > 0$ für $\varepsilon < \frac{1}{2} f(x^*)$. Also ist $x^* - \delta$ auch obere Schranke von M im Widerspruch zur Supremumseigenschaft von x^*. □

Korollar 1.4 (Zwischenwertsatz)
Sei $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y_1 = \min\{f(a), f(b)\}$, $y_2 = \max\{f(a), f(b)\}$, dann gibt es zu jedem $y \in [y_1, y_2]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. M.a.W. Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird mindestens einmal angenommen.

Beweis: Wende den Nullstellensatz auf $\tilde{f}(x) = f(x) - y$ an. □

Bemerkung Ist $f(a) < f(b)$, dann definiere $g : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ als $g(y) = sup\{x \in [a, b] : f(x) < y\}$. Dann ist $f(g(y)) = y$, d.h g ist Rechtsinverse zu f.

Korollar 1.5 (Nullstelle eines Polynoms ungeraden Grades)
Sei f ein Polynom ungeraden Grades n mit Koeffizienten a_i, $a_n = 1$. Dann hat f mindestens eine Nullstelle x_0, mit $x_0 \in [-2R, 2R]$, wobei $R = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \sqrt[k]{|a_{n-k}|}$. .

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, dass ein spezielles f eine Nullstelle in $[-2,2]$ hat. Dann verallgemeinern wir diese Aussage.
Sei zunächst $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in [-1,1]$.
Zu zeigen ist: $f(-2) < 0 < f(2)$

$$f(-2) = (-2)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(-2)^k \leq -2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = -2^n + (2^n - 1) = -1$$

$$-f(2) = -2^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-a_k)2^k \leq -2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = -2^n + (2^n - 1) = -1$$

Zusammen gilt also: $f(-2) \leq -1 < 0 < 1 \leq f(2)$

Verallgemeinerung
Sei f nun beliebig. Wir definieren $g(y)$, auf das wir den Spezialfall anwenden können. Es für $R \in \mathbb{R}^+$:

$$g(y) = \frac{1}{R^n} f(Ry) = y^n + \frac{a_{n-1}}{R} y^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{R^{n-1}} y + \frac{a_0}{R^n}$$

Es soll jeder Koeffizient von g im Betrag ≤ 1 sein, also muss für den k-ten Koeffizient gelten:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_k}{R^{n-k}} \right| \leq 1 \\ \text{, d.h..} \quad & R \geq \sqrt[n-k]{|a_k|} \\ \text{Insgesamt:} \quad & R = \max_{k=1,\dots,n} \sqrt[k]{|a_{n-k}|} \end{aligned}$$

Da n ungerade ist, hat $g(y)$ eine Nullstelle y_0 in $[-2,2]$, dann ist $f(Ry_0) = 0$ und somit f hat mindestens eine Nullstelle in $[-2R, 2R]$. □

Satz 1.6 (Äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit)
Sei $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) f stetig in x_0

(ii) Für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$ (Folgenstetigkeit)

Beweis:
i) $\Longrightarrow$ *ii)*
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert.
Nach Definition von Stetigkeit in x_0 existiert ein $\delta > 0$, so dass $\forall x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$
Nach Definition existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta \implies |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$$

ii.) $\Longrightarrow$ *i.)*
Angenommen f ist nicht stetig in x_0, das heißt $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Betrachte $\delta_n := \frac{1}{n}$. Fixiere ε_0.
Also existiert $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \implies x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$ □

Bemerkung Schreibweise:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow$ Für alle Folgen $x_n \to x_0 : f(x_n) \to f(x_0)$

§2 Stärkere Stetigkeitsbegriffe

Definition 2.1 (Gleichmäßige Stetigkeit)
$f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Erinnerung Stetigkeit auf D: $\forall x \in D \exists \delta > 0 \forall y \in D : |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Definition 2.2 (Lipschitz-Stetigkeit)
$D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, x \in D$, f heißt Lipschitz-stetig, falls es $L > 0$ gibt:

$$\forall y, z \in D : |f(y) - f(z)| \leq L|y-z|$$

Definition 2.3 (lokale Lipschitz-Stetigkeit)
$D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, x \in D$, f heißt in x lokal Lipschitz-stetig, falls es $r > 0, L > 0$ gibt:

$$\forall y, z \in (x-r, x+r) : |f(y) - f(z)| \leq L|y-z|$$

Lemma 2.4 (Zusammenhang der verschiedenen Stetigkeitsdefinitionen)
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig auf $D \implies f$ gleichmäßig stetig auf $D \implies f$ ist stetig auf D.

Beweis: Wenn f Lipschitz-stetig, dann gilt für $\delta \leq \frac{\varepsilon}{1+L}$: $|f(x) - f(y)| \leq L \underbrace{|x-y|}_{\leq \frac{\varepsilon}{1+L}} \leq L\frac{\varepsilon}{1+L} < \varepsilon$.

Wenn f gleichmäßig stetig, dann gilt $\forall x \in D : \forall \varepsilon > 0$ gibt es ein (globales) $\delta > 0$, sodass $|x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Somit ist f stetig auf D. □

Bemerkung

- Es gibt stetige Funktionen, die nicht gleichmäßig stetig sind, z.B.: $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben ducrh $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Es gibt gleichmäßig stetige Funktionen, die nicht lipschitzstetig sind, z.B die Wurzelfunktion.

Lemma 2.5 (Stetigkeit der Wurzelfunktionen)
Die Wurzelfunktionen $y = f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ sind stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt[n]{x}$ stetig.

Beweis: 1.Fall: $x > 0$. Zeige: f ist lokal lipschitz-stetig in x. Setze $r = \frac{x}{2}$, seien $y, z \in D := (\frac{x}{2}, \frac{3x}{2})$ beliebig.

$a = \sqrt[n]{y}, b = \sqrt[n]{z}, \quad y - z = a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
$a, b > \sqrt[n]{\frac{x}{2}} : \quad \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} > n \sqrt[n]{\frac{x}{2}}^{n-1} = n(\frac{x}{2})^{1-\frac{1}{n}}$
$\implies |f(y) - f(z)| = |a-b| < \frac{|y-z|}{n(\frac{x}{2})^{1-\frac{1}{n}}}$

Dass heißt: $L = \frac{1}{n}(\frac{2}{x})^{1-\frac{1}{n}}$ ist die Lipschitz-Konstante für D. Also ist f stetig. Jedoch ist f nicht lipschitzstetig, da $L(x) \to \infty$ für $x \to 0$.

Fall 2: $x = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze: $\delta = \varepsilon^n$. Für alle $y > 0$ mit $|y - z| = y^n < \delta$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{\delta} = \varepsilon$$

Definition 2.6 (Abgeschlossenheit)
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen*, wenn für alle konvergenten Folgen $x_n \in M$ gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$.*

Definition 2.7 (Kompaktheit)
Eine Menge $K \subseteq R$ heißt kompakt*, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist. Das ist äquivalent dazu, dass K die endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle ist.*

Beispiel

- $[0,1]$ ist kompakt.
- $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, aber nicht kompakt
- $[0,1[$ ist nicht abgeschlossen.

Satz 2.8 (Heine-Borel)
Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig (auf K). Dann ist f gleichmäßig stetig (auf K).

Beweis: **Annahme:** f nicht gleichmäßig stetig, das heißt:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in K : |x_\delta - y_\delta| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$$

Fixiere das entsprechende ε. Betrachte: $\delta_n = \frac{1}{n}$. Finde zu jedem δ_n Punkte $x_n, y_n \in K$ mit:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Da K kompakt ist, sind x_n und y_n beschränkt und es existieren nach Bolzano-Weierstraß Teilfolgen $(x_{n_k}), (y_{n_k})$ mit $x_{n_k} \to x_0 \in K$, $y_{n_k} \to y_0 \in K$.
Außerdem gilt: $|x_0 - y_{n_k}| \leq |x_0 - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \to 0 \implies y_{n_k} \to x_0$.
Wegen Stetigkeit von f folgt:

$$f(x_k) \to f(x_0), f(y_{n_k}) \to f(x_0) \implies \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \overset{da\ |\cdot| st.\ Fkt.}{=} |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ Also ist f gleichmäßig stetig. □

Bemerkung

- Der Satz gilt nicht für (halb-) offene oder uneigentliche ($\pm\infty$ Randpunkte des Intervalls) Intervalle.

Satz 2.9 (Weierstraß)
Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig auf K.
Dann existiert $x_*, x^* \in K$: $f(x_*) = \min_{x\in K} f(x), f(x^*) = \max_{x \in K} f(x)$

Beweis: **Annahme:** f unbeschränkt auf K, das heißt $\{|f(x)| \mid x \in K\}$ ist unbeschränkt.
$\implies \forall m \in \mathbb{N} \exists x_m \in K : f(x_m) \geq m$ also (x_m) eine reelle Folge auf K. Nach Bolzano-Weierstraß (K beschränkt) existiert eine Teilfolge (x_{m_k}) mit $x_{m_k} \to \overline{x}$.
Da K außerdem abgeschlossen ist, gilt $\overline{x} \in K$, wegen Stetigkeit von f auf K (also insbesondere in $\overline{x} \in K$) gilt: $f(x_{m_k}) \to f(\overline{x}) \implies (f(x_{m_k}))$ ist beschränkt $\implies (|f(x_{m_k})|)$ ist beschränkt. - Widerspruch zur Wahl der x_m.

Also $\{f(x) \mid x \in K\}$ beschränkt $\implies \exists \xi = \sup\{f(x) \mid x \in K\}, \exists \eta = \inf\{f(x) \mid x \in K\}$
Aus der Definition von sup und inf folgt:

$$\exists (x_n) \subset K : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \xi, \exists (y_n) \subset K : \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \eta$$

Da K beschränkt ist, sind x_n und y_n beschränkt und es existieren nach Bolzano-Weierstraß Teilfolgen $(x_{n_k}), (y_{n_k})$ von $(x_n), (y_n)$ mit:

$$x_{n_k} \to x^*, y_{n_k} \to x_* \underset{K \text{ abgeschlossen}}{\implies} \text{insbesondere } x^*, x_* \in K.$$

Wegen Stetigkeit von f auf ganz K folgt somit $\xi = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*), \eta = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_*)$.
Damit gilt: $\xi = \max_{x\in K} f(x), \eta = \min_{x \in K} f(x)$ □

Beispiel

(i) $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $]0,1]$, aber nicht nach oben beschränkt.

(ii) $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x$ ist stetig auf $]0,1[$ und beschränkt (durch 0 und 1), nimmt aber kein Minimum oder Maximum an.

Definition 2.10
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Dann definiert man:

(i) $f \pm g$ *durch* $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \forall x \in D$

(ii) $f \cdot g$ *durch* $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \forall x \in D$

(iii) $\frac{f}{g}$ *durch* $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \forall x \in D$ *mit* $g(x) \neq 0$

Bemerkung Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \forall x \in D$

Satz 2.11 (Verknüpfung stetiger Funktionen)
Seien $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D, f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0. Wenn außerdem $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Beweis: Mittels äquivalenter Charakterisierung der Stetigkeit und Grenzwertsätzen für Folgen.

Sei $(x_n) \subseteq D$ beliebig, $x_n \to x_0$. Nach Voraussetzung gilt dann $f(x_n) \to f(x_0), g(x_n) \to g(x_0)$. Aus den Grenzwertsätzen folgt:

$(f \pm g) : (f \pm g)(x_n) = f(x_n) \pm g(x_n) \to f(x_0) \pm g(x_0) = (f \pm g)(x_0)$.

$(f \cdot g)$: analog

$(\frac{f}{g})$: Es ist noch zu zeigen, dass (unter der Voraussetzung: $g(x) \neq 0$) ab einem Index n_0: $g(x_n) \neq 0$
(Dann analog mittels Grenzwertsätzen)
Angenommen dies gilt nicht, das heißt $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k \geq k : g(x_{n_k}) = 0$
$\implies$ es existieren unendlich viele x_{n_k} aus (x_n) mit $g(x_{n_k}) = 0 \implies 0$ ist Häufungspunkt der Folge $(g(x_n))$ wegen $g(x_n) \to g(x)$ muss also gelten $g(x_n) = 0$ □

Satz 2.12 (Komposition von stetigen Funktionen)
Seien $g : D \to \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{im}(g) \subseteq E$ und g stetig in $x_0 \in D$, f stetig in $g(x_0) \in E$ $(E, D \subseteq \mathbb{R})$. Dann ist $f \circ g$ stetig in x_0.

Bemerkung $(f \circ g)(x) := f(g(x)), f \circ g : D \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fix. Wegen Stetigkeit von f in $g(x)$ existiert $\gamma > 0$ mit $\forall y \in E$:

$$|y - g(x_0)| < \gamma \implies |f(y) - f(g(x_0))| < \varepsilon$$

Wegen Stetigkeit von g in x_0 existiert $\delta > 0$ mit:

$$\forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \gamma$$
$$\underset{g(x) \in E}{\implies} \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$$

§3 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$ hat den Konvergenzradius $\rho = \infty$, ist also für alle $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ wohldefiniert und stetig. Wegen der sich aus dem Wurzelkriterium ergebenden absoluten Konvergenz führt das Cauchy-Produkt auf die Funktionalgleichung $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Lemma 3.1 (Elementare Eigenschaften des Exponentials)

(i) $x > 0 \implies \exp(x) > 1 = \exp(0) > \exp(-x) > 0$

(ii) $x < y \iff \exp(x) < \exp(y)$ ***Monotonie***

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = \infty, \ \lim\limits_{x \to \infty} \exp(-x) x^n = 0$

Beweis:

(i) $\exp(x) = 1 + x + \ldots \geq 1 + x$ für $x > 0$

$\exp(0) = 1 + 0 + \ldots = 1$

$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} < 1$, da $\exp(-x)\exp(x) = \exp(0) = 1$

(ii) $\exp(y) = \exp(x)\underbrace{\exp(y-x)}_{>1 \iff y>x} > \exp(x)$

(iii) $\frac{\exp(x)-1}{x} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1\right)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \ldots$

$\implies \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!} = \lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!} = 1$

(iv) $\exp(x) = \ldots\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ für $x \geq 0 \implies \lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)}{x^n} \geq \lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+1}}{x^n(n+1)!} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(n+1)!} = \infty$

$\lim_{x\to\infty}\exp(-x)x^n = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\exp(x)}{x^n}} = "\frac{1}{\infty}" = 0$ □

Bemerkung Man kann zeigen, dass $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ und die Eigenschaft $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1$ die Funktion $\exp(x)$ eindeutig, das heißt ohne Bezug auf die Potenzreihe, definiert.

Definition 3.2 (Eulersche Zahl)
Der spezielle Wert $e = \exp(1) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} + \ldots = 2.7182\ldots$ heißt eulersche Zahl und erscheint sehr häufig.

Satz 3.3 (Interessante Eigenschaften von $\exp(x)$)

(i) e ist irrational (sogar transzendent)

(ii) $\exp(m/n) = [\exp(1)]^{\frac{m}{n}}$ *für $n, m \in \mathbb{N}$.*

(iii) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = \exp(1)$

(iv) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$

Beweis:

(i) **Annahme:** $\frac{m}{n} = e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\implies n!(\frac{m}{n}) = m(n-1)! = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)! + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}$$

$$\implies \mathbb{N} \ni \sum_{k=n}^{\infty}\frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{n+1+j} \leq \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{(1-\frac{1}{n+2})} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \in (0,1)$$

$\implies$ Widerspruch zur Ganzzahligkeit.

(ii) folgt „unmittelbar“ aus der Funktionalgleichung.

(iii)

$$\begin{aligned}
\exp(1) - (1 + \frac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left[1 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{(k-1)}{n}\right)}_{\in[0,1]}\right]}_{\in[0,1]} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{(k-1)}{n}\right)\right] + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

für festes $m < n$.
Für $n \to \infty$ ergibt sich:

$$0 \leq e - \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left[1 - (1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \tfrac{(k-1)}{n})\right] + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

da für festes k

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left[1 - (1 - \tfrac{1}{n})\,(1 - \tfrac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \tfrac{(k-1)}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{j}{n}\right) = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Schließlich lassen wir auch $m \to \infty$ gehen und erhalten $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} = 0$, da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert.

(iv) Selbst! □

Satz 3.4 (Umkehrfunktion in $\mathbb{R}$)
Falls f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$, $a \in \mathbb{R} \ni b$, stetig und streng monoton wachsend, das heißt $x < y \in [a, b] \implies f(x) < f(y)$, dann existiert eine inverse Funktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] =: E \to [a, b]$. Diese ist auch streng monoton wachsend und stetig.

Beweis: Injektivität folgt aus der Monotonie und der Zwischenwertsatz impliziert, dass $f(x) = z$ für alle $z \in [f(a), f(b)]$ eindeutig lösbar ist. Also ist f eine Bijektion von $D := [a, b]$ auf $E = [f(a), f(b)]$. Zu zeigen bleibt die Stetigkeit.
Für $y \in (f(a), f(b))$ existiert $x \in (a, b)$ so, dass $f(x) = y$. Für $0 < \varepsilon := \min(x - a, b - x)$ gilt:

$$|\tilde{x} - x| < \varepsilon \iff f(x - \varepsilon) < f(\tilde{x}) < f(x + \varepsilon)$$

Also folgt für $\tilde{y} = f(\tilde{x})$: $|\tilde{y} - y| < \delta := \min(f(x + \varepsilon) - f(x), f(x) - f(x - \varepsilon))$ dass:

$$|f^{-1}(\tilde{y}) - f^{-1}(y)| = |\tilde{x} - x| < \varepsilon$$

Daher kann ε beliebig klein gewählt werden, so dass sich Stetigkeit von f^{-1} im Inneren von E $(f(a), f(b))$, ergibt. Gesonderte Betrachtung für $x = a$ und $x = b$ ergibt Stetigkeit auf $[f(a), f(b)]$

Korollar 3.5
Durch Anwendung auf $-f(x)$ lässt sich der Satz unmittelbar auf streng monoton fallende Funktionen erweitern. Es gilt auch auf offenen und halboffenen Intervallen, also $(a, b), [a, b), (a, b]$, sowie für $a = -\infty$ oder $b = \infty$. Im letzten Fall wird gesetzt:

$$f(a) = \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ beziehungsweise } f(b) = \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Definition 3.6 (Umkehrfunktion der Exponentialfunktion)
Die nach der Verallgemeinerung existierende Umkehrfunktion von $f(x) = \exp(x) : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$ *heißt der natürliche Logarithmus* $\log(x) = \ln(x) : (0, \infty) \to (-\infty, \infty)$.

Lemma 3.7 (Eigenschaften des Logarithmus)
Die Eigenschaften des Logarithmus folgen direkt aus den elementaren Eigenschaften der Exponentialfunktion. Für $x > 0 < y$*:*

(i) $\log(1) = 0, \log(e) = 1, \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

(ii) $\log(xy) = \log(x) + \log(y), \log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \frac{\log(1+\tilde{x})}{\tilde{x}} = 1$

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\frac{1}{n}}} = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

Beweis:

(i)
- $\exp(0) = 1 \iff \log(1) = 0$
- $\log(e) = \log(\exp(1)) = 1$
- $\frac{1}{x} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \exp(-\log(x)) \implies \log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$

(ii)
- $z = \log(xy) \iff \exp(z) = xy = \exp(\log(x)) \cdot \exp(\log(y)) = \exp((\log(x) + \log(y)))$
  $\implies z = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

(iii) $x \to 1 \iff y = \log(x) \to 0 \implies \lim\limits_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\exp(y)-1} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\exp(y)-1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$

(iv) $x \to \infty \iff y = \log(x) \to \infty \implies \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^{\frac{n}{n}}}{\exp(y)^{\frac{1}{n}}} = \left[\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^n}{\exp(y)}\right]^{\frac{1}{n}} = 0^{\frac{1}{n}} = 0$ □

Definition 3.8 (Allgemeine Potenz- und Logarithmusfunktion)
Allgemeine Potenz und Logarithmus zur Basis $0 < a \in \mathbb{R}$. $a^x := \exp(x\log(a))$ *für* $0 < x \in \mathbb{R}$ *ist die allgemeine Potenz und* $\log_a(x) := \frac{\log(x)}{\log(a)}$*für* $0 < x \in \mathbb{R}$ *ist der allgemeine Logarithmus zur Basis* a.

Lemma 3.9 (Eigenschaften des allgemeinen Logarithmus)
Für $0 < a \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $\log_a(a^x) = x$ *für* $x \in \mathbb{R} \implies \log_a(a^x) = id_{\mathbb{R}}$ *bzw* $a^{\log_a(x)} = id_{\mathbb{R}^+}$ *für* $0 < x \in \mathbb{R}$ *(Identitätsabbildungen auf* $\mathbb{R}/\mathbb{R}_+$*)*

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log(a), \lim\limits_{x\to 1} \frac{\log_a(x)}{x-1} = \frac{1}{\log(a)}$

(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Beweis: Partiell als Übung □

Definition 3.10

(i) $\sin(x) := \sum\limits_{k} = 0^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k = x - \frac{x^3}{6} \cdots$ *ungerade Potenzen*

(ii) $\cos(x) := \sum\limits_{k} = 0^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k = 1 - \frac{x^2}{2} \cdots$ *gerade Potenzen*

Bemerkung $\sin(x)$ und $\cos(x)$ lassen sich auch als Potenzreihen entwickeln, z.B. $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$, mit

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{k!} & \text{,falls k ungerade} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und sin und cos haben den Konvergenzradius $\rho = \infty$.

Lemma 3.11 (charakteristische Eigenschaften von sin und cos)

(i) $\sin^2(x) + \cos^2 = 1$, $\sin(x) = -\sin(-x)$, $\cos(x) = \cos(-x)$

(ii) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Beweis: über die definierenden Reihen und deren Cauchy-Produkte (in den Übungen). □

V Differentiation

§1 Definition und Grundeigenschaften

Idee: Annäherung einer „glatten "Funktion f in Umgebung eines Punktes x_0 durch eine affine Funktion, die die Tangente $f(x_0+h) \approx f(x_0) + m \cdot h$, mit $m = m(x_0)$ Anstieg der Tangenten. Für $h = x - x_0$ ergibt sich $f(x) \approx f(x_0) + m \cdot (x - x_0)$. Die Eigenschaft $\approx$ definiert man formal als Grenzwert des Differenzenquotienten.

Definition 1.1 (Differenzierbarkeit)

(i) Für $x_0 \in (a,b)$ und $f \in C(a,b)$ nennt man $G : (a,x_0) \cup (x_0,b) \to \mathbb{R}$:

$$G(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

den Differenzenquotienten von f an der Stelle x_0.

(ii) f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ genau dann, wenn $G(x)$ an der Stelle x_0 eine hebbare Unstetigkeitsstelle besitzt. Man nennt den Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} G(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

die Ableitung von f an der Stelle x_0.

(iii) Wenn f differenzierbar an allen $x_0 \in (a,b)$ ist, dann bezeichnet f' auch die Ableitungsfunktion $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$.

Alternative Schreibweisen für die Ableitung: $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x) \mid_{x=x_0} = \frac{df}{dx} \mid_{x=x_0} = \frac{dy}{dx} \mid_{x=x_0}$, falls $y = f(x)$.

Beispiel

(i) $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R} \implies \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0} = a\frac{x-x_0}{x-x_0} = af'(x_0)$

(ii) Für $f(x) = x^n \implies \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ mit $h = x - x_0 \to 0$ gilt:

$$\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \frac{x_0^n + nhx_0^{n-1} + \ldots - x_0^n}{h} = \frac{nhx_0^{n-1} + \ldots}{h}$$

$$\implies \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} = \lim_{h\to 0} (\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k}}_{\to 0}$$

$$\implies f'(x) = nx_0^{n-1} = [x^n]'$$

(iii) $f(x) = \exp(x)$:

$$\implies f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} (\exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0))$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\exp(x_0)\underbrace{\left(\frac{\exp(h)-1}{h}\right)}_{\to 1}\right) = \exp(x_0)\cdot 1 = \exp(x_0)$$

Wichtig: $c\exp(x) = ce^x$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist die einzige Klasse von Funktionen, die mit ihrer Ableitung übereinstimmen: $f'(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R} \iff f(x) = ce^x$ für $c \in \mathbb{R}$

(iv) $f(x) = \cos(x)$:

$$\implies \frac{1}{h}(\cos(x_0+h) - \cos(x_0)) = \frac{1}{h}(\cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) - \cos(x_0))$$

$$\implies \lim_{h\to 0} \cos(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x_0)\frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$$

$$= \cos(x_0)\cdot 0 - \sin(x_0)\cdot 1 = -\sin(x_0)$$

$$\implies \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Vorgriff zur Verständlichkeit: Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden und sind dort insbesondere beliebig oft differenzierbar.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \exp(x)$$

Entsprechendes gilt für $\sin(x), \cos(x), \ldots$

Einfaches Beispiel einer stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktion:

$$f(x) = |x| = abs(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Nahe eines beliebigen $x_0 \neq 0$ gilt entweder $abs(x) = x$ oder $abs(x) = -x$ und es ergibt sich die Ableitung

$$abs'(x) = \frac{d}{dx}abs(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Am Ursprung $x_0 = 0$ gilt für eine Folge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$:

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n \impliedby \text{divergent}$$

Trotzdem ist $f(x) = abs(x)$ relativ gutmütig und lässt sich immer noch richtungsdifferenzieren im folgenden Sinne:

Definition 1.2 (Links- und Rechtsdifferenzierbarkeit)
Eine Funktion $f \in \mathcal{C}(a,b)$ heißt an $x_0 \in (a,b)$ links- und/oder rechtsdifferenzierbar, falls folgende Grenzwerte existiert:

$$f'_-(x) = \lim_{h\nearrow 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \textit{beziehungsweise} \quad f'_+(x) = \lim_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Für beliebiges φ bedeutet $\lim_{x\nearrow a}\varphi(x) = c$, dass für alle Folgen $(x_n) \subset \{a > x \in \mathbb{R}\}$ mit $x_n \to a$ gilt:

$$\lim_{x_n\to a}\varphi(x_n) = c$$

Entsprechend $\lim\limits_{x\searrow a}\varphi(x)=\tilde{c}$

Man nennt $f'_-(x)$ *und* $f'_+(x)$ *dann die links- und rechtsseitige Ableitung und* $f(x)$ *selbst richtungsdifferenzierbar an der Stelle* x*, falls beide existieren.*

Beispiel $f(x)=|x| \implies f'_-(0)=-1$ und $f'_+(0)=1$

$$\varphi(x)=\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{für } x=0\\ -1, & \text{für } x<0\end{cases}\qquad \text{wobei}\quad \lim_{x\nearrow 0}\varphi(x)=-1,\quad \lim_{x\searrow 0}\varphi(x)=1$$

Lemma 1.3 (Zusammenhang von Richtungsdifferenzierbarkeit und Differenzierbarkeit)
Eine Funktion $f\in\mathcal{C}(a,b)$ *ist an der Stelle* x_0 *differenzierbar genau dann wenn die Richtungsableitungen* $f'_-(x_0)$*,* $f'_+(x_0)$ *existieren und den gleichen Wert haben.*

Beweis: Es gilt jeweils für gegebenes $\varepsilon>0$ und geeignetes $\delta>0$, dass:

(i) bei Differenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]-f'(x)|<\varepsilon$ für $h\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$

(ii) bei Linksdifferenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]-f'_-(x)|<\varepsilon$ für $h\in(-\delta,0)$

(iii) bei Rechtsdifferenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]-f'_+(x)|<\varepsilon$ für $h\in(0,\delta)$

Offensichtlich folgt aus (i) sowohl (ii) als auch (iii) mit $f'_-(x)=f'(x)=f'_+(x)$. Umgekehrt implizieren (ii) und (iii) mit $f'_-(x)=f'_+(x)$ die Aussage (i) mit $f'(x)=f'_-(x)=f'_+(x)$. □

Beispiel $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{3}{2}} \text{ für } x>0\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$
An der Stelle $x_0=0$ gilt:

$$f'_-(0)=\lim_{h\nearrow 0}\frac{f(h)-0}{h}=\lim_{h\nearrow 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\text{und}\qquad f'_+(0)=\lim_{h\searrow 0}\frac{f(h)-0}{h}=\lim_{h\searrow 0}\frac{h^{\frac{3}{2}}}{h}=\lim_{h\searrow 0}h^{\frac{1}{2}}=0$$

$\implies f'(0)=0$ existiert.

Satz 1.4 (Ableitungen von Summen, Produkten, Quotienten)
Falls $f,g\in\mathcal{C}(a,b)$ *und an der Stelle* x_0 *differenzierbar, so sind auch folgende Kombinationen auch differenzierbar mit den angegebenen Ableitungswerten:*

(i) ***Linearität*** *(Additivität und Homogenität der Ableitung):*
$h(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$ *mit* $\alpha\in\mathbb{R}\ni\beta \implies h'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$

(ii) ***Produktregel:*** $h(x)=f(x)g(x) \implies h'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$

(iii) ***Quotientenregel:*** $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ *mit* $g(x_0)\neq 0 \implies h'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis:

(i) offensichtlich beim Hinschreiben

(ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\right]\\&=\lim_{x\to x_0}g(x)\cdot\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]+\lim_{x\to x_0}\left[f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\&=\lim_{x\to x_0}g(x)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

(iii) eventuell in der Übung. □

Beispiel Die schon bewiesene Aussage $\frac{d}{dx}x^n = x^{n-1}$ für $n \geq 0$ lässt sich mit der Produktregel durch Induktion überprüfen:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}(x \cdot x^{n-1}) = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot \frac{d}{dx}x^{n-1} = x^{n-1} + \underbrace{x(n-1)x^{n-2}}_{\text{Induktionsannahme}} = nx^{n-1}$$

Die Quotientenregel ergibt für $n < 0$:

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^{-n}} = \frac{0 \cdot x^{-n} - (-n)x^{-n-1} \cdot 1}{(x^{-n})^2} = \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}$$

Frage: Was passiert bei Hintereinanderausführung: $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \ldots \xrightarrow{h}$ (Komposition)

$$x \in (a,b) \subset \mathbb{R}, \quad y = f(x), \quad z = g(y) \implies h(x) = g(f(x))$$

Satz 1.5 (Kettenregel)
Sei $f \in \mathcal{C}(a,b)$ an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar und g auf der Umgebung $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ von $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ in der Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ von x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\frac{dh(x)}{dx}\,|_{x_0} = h'(x_0) = \frac{dz}{dx}\,|_{x=x_0} = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Eselsbrücke nach Leibniznotation: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$

Beweis: Wegen der Stetigkeit von f gilt für $x \to x_0 \implies y = f(x) \to y_0 = f(x_0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left[\left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\right) \cdot \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)\right] \\ &= \lim_{y\to y_0}\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0)f'(x_0)\end{aligned}$$

Dieser Beweis ist gültig, falls $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0$ und sonst $f(x) \neq f(x_0)$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$.

Allgemeiner betrachte die Darstellung:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ wobei } G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{falls } y \neq y_0 \\ g'(y_0) \end{cases} \quad \text{für festes } y_0$$

Differenzierbarkeit von g an y_0 ist äquivalent zur Stetigkeit von $G(y)$ an $y = y_0$. Also folgt aus den Grenzwertsätzen, dass:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} G(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} G(f(x)) \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y\to y_0} G(y)f'(x_0) \\ &= G(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\end{aligned}$$

Beispiel $\sin(x^n) = g(f(x))$ mit $f(x) = x^n, g(y) = \sin(y), f'(x) = nx^{m-1}, g'(y) = \cos(y)$

$$\implies f'(x_0) = \underbrace{\cos(x^n)}_{\text{äußere Ableitung}} nx^{n-1}$$

Definition 1.6 (Minima und Maxima)
Für $f : D \to \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in D$ ein lokales Minimum beziehungsweise lokales Maximum, wenn gilt:

$$\delta > 0, x \in B_\delta(x_0) = \{x \in D : |x - x_0| < \delta\} \implies f(x) \geq f(x_0) \text{ bzw. } f(x) \leq f(x_0)$$

Falls Aussage für beliebiges δ gilt, heißt x_0 globales Minimum bzw. Maximum von f auf D.

Beispiel $f(x) = \frac{(1+\cos(x))}{(1+x^2)}$ auf $D = \mathbb{R}$ alle lokalen Minima sind globale Minima mit Minimalwert 0. Nur das lokale Maximum $f(0) = 2$ ist auch globales Maximum.

Satz 1.7 (Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung (1. Ableitung))
Sei f auf $[a,b]$ stetig, in (a,b) differenzierbar und an $x = a$ rechts und an $x = b$ links differenzierbar. Dann gilt für jedes lokale Minimum $x_0 \in [a,b]$ entweder:

(i) $a < x_0 < b$ *und* $f'(x_0) = 0$

(ii) *oder* $a = x_0$ *und* $f'_+(x_0) \geq 0$

(iii) $x_0 = b$ *und* $f'_-(x_0) \leq 0$

Beweis: Falls $x_0 < b$ folgt aus Minimalität, dass $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

Dies beweist (ii) für $x_0 = a$. Entsprechend für $x_0 > a$ gilt $f'_-(x_0) \leq 0$. Für alle $x_0 \in (a,b)$ gilt sowohl $f'_+(x_0) \leq 0$ als auch $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0$ $\square$

Bemerkung Obige Aussagen sind notwendige Bedingungen für Optimalität. Hinreichend für Minimalität (lokal) von $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ ist, dass $f'_+(a) > 0$ beziehungsweise $f'_-(b) < 0$. Für Maximalität von f an x_0 gilt dieselbe Stationaritätsbedingung $f'(x_0) = 0$ bei $x_0 \in (a,b)$ und am Rand müssen jeweils die Ungleichung invertiert werden.

Allgemein werden Optimierungsprobleme (Extremwertaufgaben) als Minimierungsprobleme formuliert (keine Einschränkung der Allgemeinheit, da $\max\{f(x) \mid x \in D\} = -\min\{-f(x) \mid x \in D\}$).

Satz 1.8 (Mittelwertsatz der Differentiation)
Falls $f \in \mathcal{C}[a,b]$ und differenzierbar in (a,b) existiert mindestens ein Zwischenwert x mit :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) \text{ beziehungsweise } f(b) - f(a) = f'(x)(b-a)$$

Beweis: Betrachte die stetige Funktion $\varphi(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \implies \varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ und φ in (a,b) differenzierbar $\implies \varphi$ hat ein Minimum oder Maximum an $x \in [a,b]$ nach Weierstraß. Falls Maximalwert gleich Minimalwert muss gelten $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \implies \varphi'(x) = 0 \forall x \in (a,b)$. Ansonsten ist entweder Max oder Min ungleich 0 und wird somit an $x_0 \in (a,b)$ angenommen. Wegen der notwendigen Optimalitätsbedingung 1. Ordnung gilt:

$$\implies 0 = \varphi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, [a,b] = [0,1]$

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$ Mittelwertsatz gilt für x mit $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \implies x = \frac{1}{4}$

Bemerkenswert: f ist am linken Rand noch nicht einmal richtungsdifferenzierbar, da Tangente vertikal.

Korollar 1.9 (Monotone und streng monotone Funktionen)
Eine auf (a,b) differenzierbare Funktion f ist streng monoton steigend beziehungsweise streng monoton fallend, wenn entweder:

$$\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0 \text{ beziehungsweise } \forall x \in (a,b) : f'(x) < 0$$

Sie ist lediglich monoton, wenn diese Bedingungen schwach erfüllt sind, dass heißt:

$$\inf_{a<x<b}(f'(x)) \geq 0 \text{ oder } \sup_{a<x<b}(f'(x)) \leq 0$$

Beweis: Es gilt für $a \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq b$ nach Mittelwertsatz $f(\tilde{b}) - f(\tilde{a}) = (\tilde{b} - \tilde{a})f'(x)$ für $x \in (\tilde{a}, \tilde{b})$. Es folgt:

$$f(\tilde{b}) - f(\tilde{a}) > 0 \iff f'(x) > 0 \implies \text{ strenges Wachstum folgt aus } f'(x) > 0$$

$f(\tilde{b}) - f(\tilde{a}) \geq 0 \iff f'(x) \geq 0$, zum Beweis der Notwendigkeit von $\inf(f'(x)) \geq 0$ für schwach monotones Steigen nehme an, dass $f'(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0) \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$\implies f \text{ nicht monoton wachsend – Widerspruch.}$$

Satz 1.10 (Existenz und Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen)
Falls die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ für alle $x \in (a,b)$ existiert und positiv ist, so besitzt $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ eine Inverse $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Diese ist für alle $y_0 \in (f(a), f(b))$ differenzierbar und es gilt:

$$[f^{-1}(y_0)]' := \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \mid_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

wobei $y_0 = f(x_0)$ beziehungsweise $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Die Aussage gilt entsprechend wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis: Strenge Monotonie folgt aus dem Korollar. Dadurch ist die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion garantiert. Außerdem gilt:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

da $f'(x_0) \neq 0$ nach Voraussetzung. □

Bemerkung Funktionen, die nicht auf ihrem ganzen Definitionsbereich monoton sind, d.h. irgendwo steigen und irgendwo fallen, schränkt man häufig auf geeigneten Definitionsbereich ein.
Die Aussage des Umkehrsatzes ist konsistent mit der Kettenregel, da für f^{-1} differenzierbar gelten muss, dass:

$$1 = x' = \left[f(f^{-1}(x))\right]' = f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

Korollar 1.11 (besondere Ableitungen)

(i) $\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}$

(ii) $\frac{d}{dx} x^y = yx^{y-1}$ *für* $0 < x \in \mathbb{R}$

(iii) $\frac{d}{dx} y^x = \log(y) y^x$ *für* $0 < y \in \mathbb{R}$

Beweis:

(i) Nach vorherigem Satz folgt für die Umkehrfunktion $\log(y) = f^{-1}(y)$ von $f(x) = \exp(x)$, dass $\frac{d}{dy} \log(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}$

(ii) $\frac{d}{dx} x^y = \frac{d}{dx} \exp(y \log(x)) = \exp(y \log(x)) \left(\frac{y}{x}\right) = x^y \frac{y}{x} = yx^{y-1} (y \equiv n)$

(iii) $\frac{d}{dx} \exp(x \log(y)) = \log(y) \exp(x \log(y)) = \log(y) y^x$ □

Satz 1.12 (Lipschitzstetigkeit stetiger, differenzierbarer Funktionen)
Sei f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann ist f auf $[a,b]$ lipschitzstetig genau dann wenn $L_0 := \sup(|f'(x)| : a < x < b) < \infty$. Falls endlich, ist L_0 die kleinstmögliche Lipschitzkonstante auf $[a,b]$.

Beweis: Falls f lipschitzstetig mit Konstante L ist, folgt

$$\forall x_0 : |f'(x_0)| = \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq L \implies L \geq L_0$$

□

Umgekehrt gilt nach dem Mittelwertsatz, dass $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| = |f'(z)|$ für $x < z < y$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1+\cos(x)}{1+x^2} \implies |f'(x)| = \frac{|(-\sin(x))(1+x^2) - 2x(1+\cos(x))|}{(1+x^2)^2}$$
$$\leq \frac{1+x^2+2|x|2}{(1+x^2)} \leq \frac{(1+2x)^2}{(1+x^2)^2} \leq 4$$

mit $1 + x^2 + 4|x| \leq 1 + 4x^2 + 4x \leq (1+2x)^2$ und $|\sin(x)| \leq 1 \geq |\cos(x)|$.

§2 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Satz 2.1 (Satz von Rolle)
Sei $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $f(a) = f(b)$ *und* f *differenzierbar auf* $]a, b[$. *Dann existiert* $\xi \in]a, b[$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Folgt direkt aus dem Mittelwertsatz. □

Satz 2.2 (Verallgemeinerte Mittelwertsatz)
Sei $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, f, g *differenzierbar auf* $]a, b[$ *und* $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in]a, b[$. *Dann existiert* $\xi \in]a, b[$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis: Setzen $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$.
Es gilt: $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$ differenzierbar auf $]a, b[$ sowie $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$
Satz von Rolle liefert:

$$\exists \xi \in]a, b[: 0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)$$

□

Bemerkung $g(b) \neq g(a)$ wegen Voraussetzung und Rolle.

Satz 2.3 (Regel von l'Hospital)
Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *differenzierbar und* $g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$. *Weiterhin gelte:*

(i) $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$ *oder*

(ii) $\lim\limits_{x\to b} |g(x)| = \infty$

Falls nun der eigentliche ($\in \mathbb{R}$ *) oder uneigentliche* ($\in \infty$ *) Grenzwerte* $\lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert, so existiert auch* $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ *und beide Grenzwerte sind gleich.*

(Analog für $x \to a$*)*

Beweis: Betrachten nur $A = \lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$.

(i) $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$:

(a) f, g stetig auf $(a, b]$ fortsetzbar, das heißt insbesondere $b \in \mathbb{R}, f(b) = 0 = g(b)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $x \in]b - \delta, b[$ für $0 < \delta < b - a$ derart, dass $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \varepsilon \forall x \in]b - \delta, b[$. Wegen dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in]x, b[$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Also $|\frac{f(x)}{g(x)} - A| = |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A| < \varepsilon$.

(b) $b = \infty$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > 0$. Wir definieren:

$$F(y) := \begin{cases} f(\frac{1}{y}) & , 0 < y < \frac{1}{a} \\ 0 & , y = 0 \end{cases}, G(y) := \begin{cases} g(\frac{1}{y}) & , 0 < y < \frac{1}{a} \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

Damit gilt: $F, G \in \mathcal{C}([0, \frac{1}{a}[)$ (wegen $\lim\limits_{y\to\infty} f(\frac{1}{y}) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$) und $F'(y) = -\frac{1}{y^2} f'(\frac{1}{y})$, $G'(y) = -\frac{1}{y^2} g'(\frac{1}{y})$ für $y \in]0, \frac{1}{a}[$, also wegen Fall 1a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(\frac{1}{x})}{G(\frac{1}{x})} = \lim_{y\to 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(ii) $\lim\limits_{x\to b} |g(x)| = \infty$

(a) $b \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Voraussetzung ein $0 < \delta_0 < b - a$ mit $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \frac{\varepsilon}{4}$ $\forall x \in]b-\delta_0, b[$ und wegen (o.B.d.A.) $g(x) \xrightarrow{x \to b} \infty$ existiert auch $0 < \delta < \delta_0$ mit $|\frac{f(b-\delta_0)-A\cdot g(b-\delta_0)}{g(x)}| < \frac{\varepsilon}{2}$ sowie $|\frac{g(b-\delta_0)}{g(x)} \leq 1 \forall x \in]b - \delta_1, b]$.

Nach dem Mittelwertsatz existiert für beliebiges $x \in]b-\delta_0, b[$ ein $\xi \in]b-\delta_0, x[$ mit $\frac{f(x)-f(b-\delta_0}{g(x)-g(b-\delta_0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Also gilt:

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - A| = |\frac{f(b-\delta_0)-a\cdot g(b-\delta_0)}{g(x)} + (1 - \frac{g(b-\delta_0)}{g(x)})(\frac{f(x)-f(b-\delta_0)}{g(x)-g(b-\delta_0)} - A)| \underset{\triangle-Ungl.}{<} \frac{\varepsilon}{2} + 2|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

(b) analog zu Fall 1b $\square$

Beispiel

Typ $\frac{0}{0}$ 1. Standardtyp .

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

Typ $\frac{1}{0}$ $\rightsquigarrow$ l'Hospital nicht anwendbar

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}$ existiert nicht (Häufungspunkt $\pm\infty$), aber Anwendung von l'Hospital würde liefern: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1} = 1$

Typ $\frac{0}{1}$ l'Hospital nicht anwendbar, aber Grenzwert existiert nach den Grenzwertsätzen.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x+1} = 0$ (l'Hospital ergäbe: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$)

Typ $\frac{\infty}{\infty}$ 2.Standardtyp.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x^m+1)}{\log(x^n)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{mx^{m-1}}{x^m+1}\frac{x^n}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{mx^m}{n(x^m+1)} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x+\cos(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\cos(x)}{x}} = 1$ (Grenzwertsätze), l'Hospital nicht anwendbar, da $(x + \cos(x))' = 1 - \sin(x)$ nicht $\neq 0 \forall x$ beziehungsweise hinreichend große x.

Typ $0 \cdot \infty$ $\rightsquigarrow$ Umformen zu Brüchen: $\frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$

Typ 1^∞ $\rightsquigarrow$ Umformen mittels exp $\rightsquigarrow e^{Typ}$ wegen Stetigkeit von e.

§3 Ableitungen höherer Ordnung

Definition 3.1 (k-fache Differenzierbarkeit)
$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar in $x_0 \in]a, b[$, wenn:

$$\forall 0 \leq j < k : f^{(j+1)}(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f^{(j)}(x_0 + h) - f^{(j)}(x_0))$$

existieren (insbesondere muss f $(k-1)$mal differenzierbar auf einer Umgebung von x_0 sein. Betrachte ja Grenzwerte!).

Dabei gilt: $f^{(0)} := f, f^{(1)} = f'$ usw. Entsprechend heißt f k-mal differenzierbar auf $]a, b[$, wenn f k-mal differenzierbar $\forall x_0 \in]a, b[$.

Bezeichung: $\mathcal{C}^k(]a, b[)$ = Raum aller auf dem Intervall k-mal differenzierbaren Funktionen mit $f^{(k)} \in \mathcal{C}(]a, b[)$. $\mathcal{C}^\infty(]a, b[) := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^1(]a, b[)$ = beliebig oft (stetig) differenzierbare Funktionen.

Satz 3.2 (Leibniz-Regel, Produktregel für höhere Ableitungen)
Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar auf dem Intervall I. Dann ist $f \circ g$ auch k-mal differenzierbar und $(f \cdot g)^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{n}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-j)}(x)$

Beweis: Induktion mit Produktregel und Summenregel für 1. Ableitung analog zur binomischen Formel. □

Satz 3.3 (Gliedweise Differentiation von Potenzreihen)
Jede Potenzreihe $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k} p(x) = p^{(k)}(x) &= \sum_{j=k}^{\infty} a_j \frac{j!}{(j-k)!} (x - x_0)^{j-k} \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} a_j \cdot j \cdot (j-1) \cdots (j-k+1) \cdot (x - x_0)^{j-k}\end{aligned}$$

Für $x_0 = x$ gilt insbesondere:

$$p^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k! \iff a_k = \frac{1}{k!} p^{(k)}(x_0)$$

Beweis: IA: $k = 1$:

$$\begin{aligned}p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left((x + h - x_0)^j - (x - x_0)^j \right) \frac{1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{i=1}^{j} (x - x_0)^{j-i} \binom{j}{i} h^{(i-1)} \\ &= \lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(j(x - x_0)^{(j-1)} + \sum_{i=2}^{j} (x - x_0)^{j-1} \binom{j}{i} h^{(i-1)} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(j(x - x_0)^{(j-1)} + h \cdot \sum_{i=1}^{j-1} (x - x_0)^{j} \binom{j}{i} h^{(i-1)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot j (x - x_0)^{(j-1)}\end{aligned}$$

Die abgeleitete Reihe hat ebenfalls den Konvergenzradius ρ. Wegen $\sqrt[j]{j} \to 1$ gilt nämlich $\frac{1}{\limsup \sqrt[j]{|j \cdot a_j|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[j]{|a_j|}} = \rho$.
IS: $k \to k + 1$

$$\begin{aligned}p^{(k)}(x) &= \sum_{j=k}^{\infty} a_j \frac{j!}{(j-k)!} (x - x_0)^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k} \frac{(j+k)!}{(j)!} (x - x_0)^j \\ \implies p^{(k+1)}(x) = \left[p^{(k)} \right]' &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+k} \frac{(j+k)!}{(j)!} \cdot j (x - x_0)^{j-1} = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \frac{(j)!}{(j-k-1)!} (x - x_0)^{j-k-1}\end{aligned}$$

Da $p^{(k)}$ den Konvergenzradius ρ hat, hat auch p^{k+1} den Konvergenzradius ρ. □

Frage: Lässt sich umgekehrt eine differenzierbare Funktion durch Polynome bzw. Potenzreihen annähern, deren Koeffizienten durch $f^{(k)}(x_0)$ am Entwicklungspunkt x_0 bestimmt sind? **Antwort:** Ja! durch Taylorpolynome.

Definition 3.4
Für $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]a, b[)$ heißt

$$P_n(x_0, x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j$$

das Taylorpolynom n-ten Grades in x_0.

Satz 3.5 (Taylorformel)
Falls $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]a,b[)$, dann gilt für beliebige Paare $(x_0, x) \subset (a,b)$, dass:

$$f(x) - P_n(x_0,x) = R_n(x_0,x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\tilde{x})$$

für einen Zwischenwert $\tilde{x} \in (x_0, x)$.

Beweis: Betrachte $\varphi(x_0) = R_n(x_0,x) = f(x) - P_n(x_0,x)$ für festes x und variables x_0. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) - P_n(x,x) = 0 \\ \text{und } \varphi'(x_0) &= \frac{d}{dx_0}\varphi(x_0) = 0 - \sum_{j=0}^{n} \frac{-j(x-x_0)^{j-1} f^{(j)}(x_0)}{j!} + \frac{(x-x_0)^j f^{(j-1)}(x_0)}{j!} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(x-x_0)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j)}(x_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x-x_0)^{j-1} f^{(j)}}{(j-1)} - (x-x_0)^n \frac{f^{n+1}(x_0)}{n!} \\ &= -\frac{(x-x_0)^n f^{(n+1)}(x_0)}{n!} \end{aligned}$$

Nach dem verallgemeinerten Zwischenwertsatz existiert $\tilde{x} \in (x_0, x)$ mit:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{(x-x_0)^{n+1} - (x-x)^{n+1}} = \frac{\varphi(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{\varphi'(\tilde{x})}{-(n+1)(x-\tilde{x})^n} \\ \implies \varphi(x_0) &= \frac{\varphi'(\tilde{x}) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-\tilde{x})^n} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-\tilde{x})^n} \cdot \frac{-(x-\tilde{x})^n f^{(n+1)}(\tilde{x}))}{n!} \\ \implies \varphi(x_0) &= \frac{(x-\tilde{x})^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. $\square$

Zur Anwendung folgt:

Satz 3.6 (Hinreichende Bedingung für Maxima)
Sei $I = [a,b], f \in \mathcal{C}^2(I), x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$. Wenn $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum von f.

Beweis: Wegen f'' stetig und $f''(x_0) < 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $x \in I, |x - x_0| < \delta \implies f''(x) < 0$.

Sei $x \in I, |x - x_0| < \delta$:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^2$ mit $\theta \in (0,1) \implies |(x_0 + \theta(x-x_0) - x_0| = \theta|x-x_0| < \delta$,
das heißt, $f'(x_0) = 0, f''(x_0 + \theta(x-x_0)) < 0 \implies f(x) < f(x_0)$ $\square$

Bemerkung $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \implies x_0$ ist Minimalstelle $\implies f'(x_0) = 0, f''(x_0) \geq 0$

VI Integration

§1 Bestimmte Integration in $\mathbb{R}$

Bemerkung (Motivation) Die Berechnung von Flächen und Volumen ist die Motivation zum *Integrieren.* Das Integral wird als Funktion mit bestimmten geforderten Eigenschaften definiert. Entsprechende Vorschriften werden später hergeleitet und auf diese geforderten Eigenschaften hin geprüft. Hier leiten wir über die geometrische Anschauung das sogenannte *Riemannsche Integral* her. Dabei nutzen wir unsere Kenntnis über den Flächeninhalt von Rechtecken aus, indem wir sogenannte Treppenfunktionen definieren, welche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig nahe approximieren und bilden einen Grenzwert der Partialsummen der Rechteckflächen.

Definition 1.1 (Eigenschaften des Integrals)
$\int_a^b f(x)\,dx$ heißt Integral, falls für alle „geeigneten“ Funktionen $f, g : [a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$ ***(Linearität).***

(ii) $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$, *falls* $\forall x \in [a,b]: \; f(x) \leq g(x)$ ***(Monotonie).***

(iii) $\int_1^b 1\, dx = (b-a) \implies \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty$ ***(Beschränktheit),***
wobei $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} < \infty$ *vorausgesetzt.*

(iv) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$, *für* $c \in \,]a,b[$ ***(Additivität auf Intervallen).***

Definition 1.2 (Treppenfunktion)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt* Treppenfunktion, *wenn es eine* Zerlegung Z *gibt, mit:*

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = b\}$$

und es existieren $(c_i)_{i=0}^n$, *so dass* $c_i = f(x)$ *für* $x \in \,]x_{i-1}, x_i[$

Lemma 1.3
Die Menge der Treppenfunktionen bilden einen linearen Vektorraum $T[a,b]$.

Für $f \in T[a,b]$ *ist das Integral* $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i \in \mathbb{R}$ *eindeutig definiert und erfüllt die nach der Definition über* Eigenschaften des Integrals *geforderten Eigenschaften.*

Beweis: Zuerst wollen wir die Eindeutigkeit der Zerlegung prüfen, also angenommen wir haben für die Treppenfunktion f zu Z auch ein $\widehat{Z}$ auf dem Intervall $[a,b]$. Dann können wir die Zerlegung $\tilde{Z} = Z \cup \widehat{Z}$ bilden.

Unser Ziel ist es zu demonstrieren, dass eine Integration von f über die Zerlegungen Z, $\widehat{Z}$ und $\tilde{Z}$ immer identisch ist, bzw. etwas einprägsamer niedergeschrieben $I(Z) = I(Z \cup \widehat{Z}) = I(\widehat{Z})$. Wobei mit $I(Z)$ die Integration von f über die Zerlegung Z gemeint sei.

($\star$) Dazu zeigen wir zuerst, dass die Gleichheit erhalten bleibt, wenn nur ein weiterer Punkt in Z „hineingeschmuggelt“ wird. Also es gilt $\tilde{Z} = Z \cup \{t\}$, mit $t \in \,]x_j, x_{j+1}[$, für ein $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $|Z| + 1 = n + 1 = |\tilde{Z}|$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^n (x_i - x_{i-1})c_i = \left(\sum_{i=0}^j (x_i - x_{i-1})c_i\right) + \underbrace{c_{j+1}(t - x_j) + c_{j+1}(x_{j+1} - t)}_{\widehat{=} c_{j+1}(x_{j+1} - x_j)} + \left(\sum_{i=j+2}^n (x_i - x_{i-1})c_i\right)$$

Nun folgt induktiv durch mehrfache Anwendung von ($\star$), dass beliebig viele Zerlegungspunkte hinzugenommen werden können. Desweiteren ist $\tilde{Z} = Z \cup \widehat{Z}$ eine Menge, die rein durch Hinzunahme von Punkten zu Z oder $\widehat{Z}$ entsteht.
Also gilt schon $I(Z) = I(\tilde{Z})$ und $I(\widehat{Z}) = I(\tilde{Z}) \implies I(Z) = I(\tilde{Z} = Z \cup \widehat{Z}) = I(\widehat{Z})$

Zur Additivität auf Intervallen: Als nächstes wollen wir die „Zerlegbarkeit“ des Integrals auf die Probe stellen. Dazu überlegen wir uns vorher, dass, falls Z eine Zerlegung auf $[a,b]$ ist, dann sind auch für ein $d \in \,]x_j, x_{j+1}[$ und $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ die Menge $Z_{<d} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_j, d\}$ eine Zerlegung auf $[a,d]$,
sowie $Z_{>d} = \{d, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n = b\}$ eine Zerlegung auf $[d,b]$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^j (x_i - x_{i-1})c_i\right) + (d - x_j)c_j}_{= \int_a^d f(x)\, dx} + \underbrace{(x_{j+1} - d)c_j + \left(\sum_{i=j+2}^n (x_i - x_{i-1})c_i\right)}_{= \int_d^b f(x)\, dx}$$

$$= \int_a^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx$$

Zum Rest: Offensichtlich, da das Integral in konstante Stücke zerlegbar:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i = \underbrace{\int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx}_{= (x_1 - x_0)c_1} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx}_{= (x_2 - x_1)c_2} + \cdots + \underbrace{\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx}_{= (x_n - x_{n-1})c_1 n}$$

Mit dieser Erkenntnis kann beispielsweise **Monotonie** leicht gezeigt werden.
Seien $f \leq g$ reelle Funktionen und Z eine gemeinsame Zerlegung auf $[a, b]$ für die Stufen von f und g:

$$(c_i)_{i=1}^n, \text{ mit } c_i = f(x), \text{ für } x \in \,]x_{i-1}, x_i[\qquad (d_i)_{i=1}^n, \text{ mit } d_i = g(x), \text{ für } x \in \,]x_{i-1}, x_i[$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) &= \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\,dx \\ &= \underbrace{(x_1 - x_0)c_1}_{\leq (x_1 - x_0)d_1} + \underbrace{(x_2 - x_1)c_2}_{\leq (x_2 - x_1)d_2} + \cdots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})c_n}_{(x_n - x_{n-1})d_n} \\ &\leq \int_{a=x_0}^{x_1} g(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

Die anderen beiden Eigenschaften können ebenso gezeigt werden. □

Bemerkung Im folgenden greifen wir etwas vor und führen hier die Begriffe *metrischer* und *normierter Raum* ein. Eine Norm, nämlich die *Supremumsnorm* $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, haben wir bereits für die Eigenschaften des Integrals am Anfang des Kapitels eingeführt. Nun aber sind hier einmal zwei formalere Definitionen gegeben.

Wir benötigen diese Begriffe um weitere Aussagen über die Räume $T[a, b]$ der Treppenfunktionen und $B[a, b]$ der beschränkten Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ fällen zu können.

Definition 1.4 (Metrischer Raum)
Eine Menge X heißt metrischer Raum, falls es eine Metrik genannte Abstandsfunktion $d : X \times X \to [0, \infty]$ gibt, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:
(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ***Definitheit***
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ ***Symmetrie***
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ***Dreiecksungleichung***

Beispiel Ein triviales Beispiel ist die diskrete Metrik mit:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y = x \\ 1 & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

Definition 1.5 (Normierter Raum)
Ein Vektorraum X über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt normiert*, falls eine Normfunktion $\|\cdot\| : X \to [0, \infty[$ existiert, sodass mit $|\cdot| : K \to [0, \infty[$ der üblichen Betragsfunktion in $\mathbb{K}$ für alle $u, v \in X$ und $\alpha \in K$ gilt:*
(i) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ***Definitheit***
(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ ***Homogenität***
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ***Dreiecksungleichung***

Bemerkung Unmittelbar aus der Definition der normierten Räume folgt, das solche Räume auch metrische Räume sind. Der Begriff *Metrik* bzw. *metrische Funktion* kann, in speziellen Fällen, als *Abstandsfunktion* interpretiert werden.

Satz 1.6
Die Mengen $T[a, b]$ der Treppenfunktionen und $B[a, b]$ der beschränkten Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ sind reelle normierte lineare Räume V. Wobei hier die Linearität des Raumes folgende Eigenschaften voraussetzt:
(i) $\forall u, v \in V \Longrightarrow u \pm v \in V$ ***bezüglich der Addition abgeschlossen***
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u \in V \Longrightarrow \alpha \cdot u \in V$ ***bezüglich der Multiplikation abgeschlossen***
(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in V \Longrightarrow \alpha(u \pm v) = \alpha u \pm \alpha v$ ***Distributivität***

Beweis: Leicht nachprüfbar und nachzuvollziehen. Zum Beispiel die *Dreiecksungleichung* für $B[a, b]$. Dazu lege zuerst Norm fest: $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_\infty : B[a, b] \subseteq \mathbb{R} \to [0, \infty[$:

$$\begin{aligned}\|f + g\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} \{|f(x) + g(x)|\} &\leq \sup_{a \leq x \leq b} \{|f(x)| + |g(x)|\} \\ &\leq \sup_{a \leq x \leq b} \{|f(x)|\} + \sup_{a \leq x \leq b} \{|g(x)|\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\end{aligned}$$

Bemerkung Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ stellen selbst einen normierten linearen Raum dar.

Satz 1.7
$B[a,b]$ ist vollständig, das heißt, jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B[a,b]$ besitzt einen eindeutigen Grenzwert $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Hingegen ist $T[a,b]$ nicht vollständig. Das bedeutet, dass eine Cauchy-Folge $(f_n) \subseteq T[a,b]$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f \in B[a,b] \setminus T[a,b]$

Beweis: Vollständigkeit von $B[a,b]$

Betrachte eine beliebige Cauchy-Folge $(f_n) \subseteq B[a,b]$. Dann bilden für jedes $x \in [a,b]$ die Werte $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, da $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$.

Wegen der Vollständigkeit von ganz $\mathbb{R}$ existiert also ein eindeutiger Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, den man als Wert der gesuchten Grenzfunktion $f \in B[a,b]$ definieren kann. Das heißt, wir setzen $f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in [a,b]$. Dieses f ist reellwertig und beschränkt, da

$$\begin{aligned} &\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \text{ für } n \geq n_\varepsilon \\ \Longrightarrow \quad &\|f\| \leq \|f_n\| + \varepsilon \end{aligned}$$

damit ist die Vollständigkeit von $B[a,b]$ bewiesen.

Unvollständigkeit von $T[a,b]$

Die Beweisidee ist, von der Vollständigkeit auszugehen und ein Gegenbeispiel zu liefern. Dazu betrachte eine Zerlegung $Z = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\}$ und eine Funktionenfolge f_n. So sei $c_i = \frac{i+\frac{1}{2}}{n}$ und es gilt $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$

Endergebnis ist eine Cauchy-Folge (f_n) mit einem Grenzwert $f(x) = x$, welche auf dem Intervall $[a,b]$ offensichtlich beschränkt ist, aber keine Treppenfunktion oder anders ausgedrückt: $f \in B[a,b] \setminus T[a,b]$.

□

Bemerkung Es gibt beschränkte Funktionen, die sich nicht beliebig gut durch Treppenfunktionen annähern lassen.

Beispiel (Dirichlet-Funktion)

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei $g \in T[a,b]$ eine Treppenfunktion, dann gilt $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$, da es in jedem Intervall der Zerlegung Z von g sowohl rationale, als auch irrationale Zahlen gibt.

Satz 1.8 (Regelfunktionen)
Eine Funktion $f \in B[a,b]$ ist genau dann ein Grenzwert einer Folge $(f_n) \subseteq T[a,b]$ von Treppenfunktionen, wenn sie an allen $x \in [a,b[$ einen rechtsseitigen und allen $x \in]a,b]$ einen linksseitigen Grenzwert besitzt.

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \lim_{y \searrow x} f(y) \qquad \forall x \in [a,b[\\ f_-(x) &= \lim_{y \nearrow x} f(y) \qquad \forall x \in]a,b] \end{aligned}$$

Solche Funktionen werden als „Regelfunktionen" (sprungstetig, richtungsstetig) bezeichnet. Das Mengenkürzel lautet $R_e[a,b]$.

Beweis:

„⇒" Also exisiterit für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ ein n_ε, so dass gilt

$$\forall x \in [a,b] \; \forall n > n_\varepsilon \; : \; \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Nun untersuchen wir rechtsseitige Stetigkeit, für $x \in [a,b[$. Da f Regelfunktion gibt es eine Folge von Treppenfunktionen (f_n) und demnach gibt es ein $\delta > 0$, so dass:

$$\forall s,t \in]x, x+\delta[\cap [a,b] : \; \|f_n(t) - f_n(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Offensichtlich muss letzteres gelten, da immer ein δ gefunden werden kann, so dass s und t auf einer *Stufe* liegen, bzw. so dass $f_n(s) - f_n(t) = c_i^{(n)} - c_i^{(n)} = 0$.
Dann gilt schon praktischerweise, dass:

$$\forall x \in [a,b[\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall s,t \in [a,b[\text{ mit } x < s \leq t < x+\delta \; : \; \|f(t) - f(s)\| < \varepsilon$$

da
$$\|f(t)-f(s)\| \leq \|f(t)-f_n(s)\| + \|f_n(t)-f_n(s)\| + \|f_n(t)-f(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

„$\Leftarrow$“ Nun sei $f \in B[a,b]$, also als beschränkt, vorrausgesetzt und ist rechtsseitig Stetig auf $]a,b]$ bzw. linksseitig Stetig auf $[a,b[$, dann bilden wir eine Kette von x_j zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$:

$$x_j = \sup(x \in \,]x_{j-1}, b[;\ \|f(x) - \lim_{y \searrow x_j} f(y)\| < \varepsilon), \text{ für } j > 0 \text{ und } x_0 = a$$

Nun sei behauptet, dass dieser Kettenbildungsprozess nach endlich vielen Schritten beendet ist. Aber wenn dies nicht so wäre, so müsste ein $x^* \in \,]a,b]$ existieren, so dass $x_j \xrightarrow{j\in\mathbb{N}} x^*$, was die Existenz von $\lim_{y\nearrow x^*} f(y)$ ausschließen würde, weil für jedes $\varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0$, so dass f als beschränkte Funktion auf dem Intervall $]x^*-\delta, x^*[$, um mindestens ε, oszillieren müsste.
Mit dieser endlichen Kette $a = x_0, \ldots, x_k = b$ ist es nun ein leichtes eine zugehörige Treppenfunktion zu bilden:
$$\varphi_\varepsilon(x) = f(x_j), \text{ für } x \in [x_j, x_{j+1}[, \text{ bzw. } \varphi_\varepsilon(b) = f(b)$$

Mit $\varphi_{\frac{1}{n}}$ und aufgrund der Konstruktion sind die geforderten Eigenschaften vorhanden. Wir können f als Folge $(\varphi_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen darstellen. □

Satz 1.9
Jede Regelfunktion ist zum einen auf beschränkten Intervallen beschränkt und hat zum anderen höchstens abzählbar unendlich viele Sprungstellen.

Beweis: Auf beschränktem Intervall ist $f \in R_e[a,b]$ beschränkt. Um dies zeigen zu können, wähle eine Treppenfunktion φ, so dass $\|f-\varphi\| < 1$, denn dann gilt:

$$\|f\| \leq \|f-\varphi\| + \|\varphi\| < 1 + \|\varphi\|$$

Die Treppenfunktion φ besitzt sogar ein Maximum und somit ist f durch $1 + \max\|\varphi\|$ beschränkt.

Zur Abzählbarkeit der Sprungstellen. Für fixes $\varepsilon > 0$ ist die Menge $S = \{x \in \,]a,b[;\ \|f_+(x) - f_-(x)\| \geq \varepsilon\}$ endlich. Da sonst eine konvergente und o.B.d.A monoton fallende Folge von $x_n \in S$ gewählt werden kann, so dass $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \hat{x}$. Aufgrund der rechtsseitigen Stetigkeit, in jedem Punkt des Intervalls $[a,b[$, gilt:

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in \,]\hat{x}, \hat{x}+\delta[\,:\ \|f(x) - f_+(\hat{x})\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Aus der Erkenntnis gewinnen wir in wenigen Schritten folgenden Widerspruch: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ :\ x_n \in \,]\hat{x}, \hat{x}+\delta[$

$$\Rightarrow \|f_+(x_n) - f_+(\hat{x})\| < \frac{\varepsilon}{3} > \|f_-(x_n) - f_+(\hat{x})\|$$
$$\Rightarrow \|f_+(x_n) - f_-(x_n)\| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Also kann x_n aus S nicht in S sein. Also kann S nicht unendlich sein.

Nun sei $S_0 = S$ für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $S_n = \{x \in \,]a,b[\,;\ \|f_+(x) - f_-(x)\| \in [2^{-n}, 2^{-(n+1)}[\ \} \subseteq S'$ für $\varepsilon' > 0$, dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} S_n$ die Menge aller Sprungstellen von f und höchstens abzählbar unendlich. □

Definition 1.10 (Riemannintegral für reguläre Funktionen)
Sei eine beliebige Funktion $f \in R_e[a,b]$ und weitere Treppenfunktionen $f_n \in T[a,b]$ gegeben, wobei $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ konvergiert (in dem Sinne das $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$), dann ist das Integral über $[a,b]$ für f definiert als:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx$$

Satz 1.11 (Existenz und Eindeutigkeit des Riemannintegral für reguläre Funktionen)
Das Riemannintegral für reguläre Funktionen *existiert, ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig und erfüllt alle geforderten Eigenschaften eines Integrals.*

Beweis: Für $\varphi_n = \int_a^b f_n(x)dx$ gilt:

$$|\varphi_n - \varphi_m| = \left|\int_a^b f_n(x) - f_m(x)\ dx\right| \leq (b-a)\|f_n - f_m\|_\infty \leq (b-a)(\underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{\|f_m - f\|_\infty}_{\text{Cauchyfolge}})$$

$$\implies (\varphi_n)_{n=1}^\infty \text{ ist Cauchyfolge mit eindeutigem Grenzwert und so folgt die Existenz.}$$

Falls auch mit $(\tilde{f}_m)$ eine andere Folge gegen f konvergiert, so gilt für:

$$\tilde{\varphi}_m = \int_a^b \tilde{f}_m(x)\ dx \text{ das: } |\varphi_n - \tilde{\varphi}_m| = \left|\int f_n(x) - \tilde{f}_m(x)\ dx\right| \leq (b-a)\|f_n - \tilde{f}_m\| \to 0$$

M.a.W. Der Wert des Integrals $\int_a^b f\ dx$ bleibt gleich und ist somit unabhängig von der Wahl der konvergenten Folge von Treppenfunktionen.

Zu den Eigenschaften

(i) Zur Linearität: $f, g \in R_e[a,b]$, $f_n, g_m \in T[a,b]$ und $f_n \to f$, sowie $g_m \to g$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha f_n + \beta g_n)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \alpha f_n\ dx + \lim_{n\to\infty} \int_a^b \beta g_n\ dx$$

(ii) Zur Monotonie: $f \leq g$, $\|f_m - f\| < \frac{1}{m}$, $\|g_m - g\| < \frac{1}{m}$ und $f_m - \frac{1}{m} \leq f \leq g \leq g_m + \frac{1}{m}$, dann

$$\begin{aligned}
&\implies \int_a^b f_m - \frac{1}{m}\ dx \leq \int_a^b g_m + \frac{1}{m}\ dx \\
&\implies \int_a^b f\ dx - \lim_{m\to\infty} \frac{b-a}{m} \leq \int_a^b g\ dx + \lim_{m\to\infty} \frac{b-a}{m} \\
&\implies \int_a^b f\ dx \leq \int_a^b g\ dx
\end{aligned}$$

(iii) folgt unmittelbar aus der Monotonie

(iv) trivial

Damit ist alles gezeigt. □

Bemerkung Sowohl stetige, als auch monotone Funktionen, sind richtungsstetig, dh. Regelfunktionen. Damit ist die Existenz des Integrals für diese wichtige Klasse gesichert.

Bemerkung (Zur Auswertung der Integrale) Wie lassen sich solche Integrale auswerten? Dazu gibt es viele Möglichkeiten. Es lassen sich beispielsweise die Differentationsregeln teilweise umkehren, desweiteren können die sog. Riemannsummen oder auch spezielle Anwendungen der Taylorformel ausgewertet werden.

Beispiel Sei $0 < a < b$, nun wollen wir das Integral $\int_a^b \frac{1}{x}\ dx$ bestimmen. Zuerst legen wir folgende Zerlegung fest:

$$x_n = a \cdot q^n, \text{ mit } x_N = a \cdot q^N = b \text{ und eine Treppenfkt.: } \varphi_N(x) = \frac{1}{x_n}, \text{ für } x \in [x_n, x_{n+1}[$$

Denn dann:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi_N \; dx &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{x_n}(x_{n+1}-x_n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{a\cdot q^n}\cdot aq^n(q-1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} q-1 = N(q-1) \qquad \text{für } q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{N}} \text{ ergibt dies:} \\
&= N\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{N}}-1\right) = N\left(\exp\left(\frac{1}{N}\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)-1\right) \qquad \text{zur Erinnerung: } t_1^{t_2} = e^{\ln\left(t_1^{t_2}\right)} = e^{t_2\cdot\ln(t_1)} \\
&= N\left(1+\left[\frac{1}{N}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]+\frac{\left[\frac{1}{N}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2}{2}+\frac{\left[\frac{1}{N}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^3}{3}+\cdots-1\right) \qquad \text{für die Reihendarstellung von } \exp(x) \\
&= \ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2\cdot N}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2+\frac{1}{3\cdot N^2}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^3+\ldots
\end{aligned}$$

Nun, da $\int f \; dx = \lim_{N\to\infty}\int \varphi_N \; dx$, können wir den Grenzübergang durchführen und erhalten schlussendlich das gesuchte, aber wenig überraschende Resultat:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\; dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^b \varphi_N \; dx = \lim_{N\to\infty} \ln\left(\frac{b}{a}\right)+\underbrace{\frac{1}{2\cdot N}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2+\frac{1}{3\cdot N^2}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^3+\ldots}_{\text{da } N\to\infty \text{ folgt somit } \frac{1}{N}\to 0} = \ln(b)-\ln(a)$$

Beispiel (Exponentialfunktion) Für $f(x)=e^x=\exp(x)$ nutzen wir die Zerlegung $x_k=a+k\cdot h$, wobei wieder gelten soll $x_N=b$, so dass $h=\frac{b-a}{N}$. Die Treppenfunktion bilden wir wieder unter der zuhilfenahme der Funktion f selbst:

$$\varphi_N(x)=\exp(x_n), \text{ für } x\in[x_n,x_n+1[$$

Nun können wir wieder das Integral über die Treppenfunktion betrachten:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi_N(x)\; dx &= \sum_{k=0}^{N-1}\exp(x_k)(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{N-1}\exp(a+kh)(a+kh+h-a-kh) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} h\exp(a+kh) = \sum_{k=0}^{N-1} h\exp(a)\exp(kh) = h\exp(a)\sum_{k=0}^{N-1}(\exp(h))^k \\
&= h\exp(a)\frac{(\exp(h))^N-1}{\exp(h)-1} = \frac{h}{\exp(h)-1}\exp(a)(\exp(b-a)-1) = \frac{h}{\exp(h)-1}(\exp(b)-\exp(a))
\end{aligned}$$

Nun können wir das Integral betrachten:

$$\int_a^b \exp(x)\; dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^b \varphi_N(x)\; dx = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{h}{\exp(h)-1}}_{\text{l'Hospital: } \xrightarrow{h\to 0} 1}(\exp(b)-\exp(a)) = \exp(b)-\exp(a)$$

Definition 1.12 (Riemann-Summen)
Seien $f\in B[a,b]$, $Z=(x_i)_{i=0}^n$ eine Zerlegung und $z=(z_i)_{i=1}^n$, mit $z_i\in[x_{i-1},x_i]$, Zwischenpunkte, dann ist die Riemannsumme definiert als:

$$R(f,Z,z)=\sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i-x_{i-1})$$

Die sog. Feinheit $|Z|=\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}(|x_i-x_{i-1}|)$ misst die Genauigkeit der Riemannschen Summe.

Satz 1.13 (Konvergenz der Riemannsummen)
Für $f\in R_e[a,b]$ und beliebiger Folgen (Z_n,z_n) punktierter Zerlegung gilt folgende Aussage:

$$\left(|Z_n|\xrightarrow{n\to\infty}0\right)\implies\left(R(f,Z_n,z_n)\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b f(x)\; dx\right)$$

Beweis: Zuerst werden wir die Behauptung für Treppenfunktion, mittels einem induktivem Beweis, zeigen, bevor wir dann das Resultat auf Regelfunktionen erweitern. Das heisst wir betrachten 3 Fälle:

(i) f ist eine Treppenfunktion mit einer Unstetigkeit oder 2 Stufen

(ii) f ist eine Treppenfunktion mit m Unstetigkeiten oder $m+1$ Stufen

(iii) $f \in R_e[a,b]$ ist beliebige Regelfunktion

Damit zu den Fällen:

(i) $f(x) = \begin{cases} f(a), \text{ für } a \leq x < m \\ f(b), \text{ für } m < x \leq b \end{cases}$ und dann ist $\int_a^b f(x)\ dx = f(a)(m-a) + f(b)(b-m)$

Für beliebige Zerlegung existiert genau ein Index i, so dass $m \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\ dx - R(f, Z_n, z_n) \right| &= |f(a)(m - x_{i-1}) + f(b)(x_{i-1} - m) - f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - f(z_{i+1})(x_{i+1} - x_i)| \\
&\leq |f(a)|(m - x_{i-1}) + |f(b)|(x_{i-1} - m) + |f(z_i)|(x_i - x_{i-1}) + |f(z_{i+1})|(x_{i+1} - x_i) \\
&\leq 2 \cdot \|f\|_\infty (x_{i+1} - x_{i-1}) \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot 2 \cdot |Z_n| \\
&\leq 4 \cdot \|f\|_\infty \cdot \|Z_n\| \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

(ii) Falls die Annahme für alle $f \in T[a,b]$ gilt mit $m-1$ Sprüngen, folgt für f mit m Sprüngen die Existens einer Zerlegung $f = f_1 + f_2$, wobei f_1 einen und f_2 $m-1$ Sprünge hat. Also gilt für eine beliebige Folge Z_n, dass:

$$\underbrace{R(f, Z_n, z_n)}_{\int_a^b f(x)\ dx} = \underbrace{R(f_1, Z_n, z_n)}_{\int_a^b f_1(x)\ dx} + \underbrace{R(f_2, Z_n, z_n)}_{\int_a^b f_2(x)\ dx}$$

wobei der letzte Term laut Induktionsvoraussetzung gilt.

(iii) Zum letzten Fall:

$$f \in R_e[a,b] \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists f_\varepsilon \in T[a,b]\ :\ \|f - f_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \iff \|f - f_\varepsilon\|_\infty (b-a) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Nun kann $\|f - f_\varepsilon\|_\infty$ als stetige Treppenfunktion, das heisst als konstante Funktion, angesehen werden, denn dann ist $\|f - f_\varepsilon\|_\infty (b-a) = \int_a^b \|f - f_\varepsilon\|_\infty\ dx$.

$$\begin{aligned}
\implies \left| \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx \right| &\leq \left| \int_a^b f(x) - f_\varepsilon(x)\ dx \right| \\
&\leq \int_a^b \|f - f_\varepsilon\|_\infty\ dx \leq \frac{\varepsilon}{4} \wedge |R(f, Z_n, z_n) - R(f_\varepsilon, Z_n, z_n)| \leq \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

Weiterhin existiert $\delta > 0$, so dass $\|Z_n\| < \delta \underset{\text{nach ii.)}}{\implies} \left| \int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx - R(f_\varepsilon, Z_n, z_n) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir schlussendlich:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\ dx - R(f, Z_n, z_n) \right| &\leq \left| \int_a^b f(x) - f_\varepsilon(x) + f_\varepsilon(x)\ dx - R(f, Z_n, z_n) \right| \\
\leq \underbrace{\left| \int_a^b f(x) - f_\varepsilon(x)\ dx \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}} &+ \underbrace{\left| \int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx - R(f_\varepsilon, Z_n, z_n) \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|R(f_\varepsilon, Z_n, z_n) - R(f, Z_n, z_n)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}}
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - R(f, Z_n, z_n) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

Damit ist alles gezeigt. □

§2 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Satz 2.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$$f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a) \text{ , für } z \in [a,b]$$

Beweis: Nach Weierstrass (Satz 12.11) existieren $x_*, x^* \in [a,b]$ mit

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \text{ für } a \leq x \leq b$$

Integration über $[a,b]$ ergibt wegen Monotonie und Homogenität

$$\begin{array}{lll} \int_a^b f(x_*)dx & \leq \int_a^b f(x)dx & \leq \int_a^b f(x^*)dx \\ (b-a)f(x_*) & \leq (b-a)f(x) & \leq (b-a)f(x^*) \\ f(x_*) & \leq \overline{f}_{(a,b)} \equiv \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx & \leq f(x^*) \end{array}$$

Wegen vorausgesetzter Stetigkeit von f, existiert ein $z \in [a,b]$, sodass $f(z) = \overline{f}_{(a,b)} \in [f(x_*), f(x^*)]$
Warnung: Die Aussage gilt nicht für beliebiges $f \in Ri[a,b]$ □

Korollar 2.2 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f \in \mathcal{C}[a,b]$ und $0 \leq g \in Ri[a,b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(z)\int_a^b g(x)dx, \text{ für } z \in [a,b]$$

Beweis: Wegen $g(x) \geq 0$ mit x_*, x^* wie in Satz 21.1

$$f(x_*)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x^*)g(x)$$
$$\Downarrow \text{Monotonie + Homogen.}$$
$$f(x_*)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(x^*)\int_a^b g(x)dx$$

Division durch $\int_a^b f(x)dx$ und MWS für stetige Funktionen ergibt Behauptung. □

Beispiel $\int_0^5 \underset{\left(\underset{g(x)}{\uparrow}\right)}{e^{-x}} \cdot \underset{\left(\underset{f(x)}{\uparrow}\right)}{\sin(x^2)}dx = \sin(z^2) \cdot \int_0^5 e^{-x} = -\sin(z^2) \cdot [e^{-x}]_0^5 = \sin(z^2) \cdot [1 - e^{-5}]$
aber $\sin(z^2)$ für $z \in [a,b]$ nimmt alle möglichen Zahlenwerte an und ist schwer abzuschätzen.

Satz 2.3 (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)
Sei $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Dann ist

$$F_a(\tilde{x}) = \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx \in \mathcal{C}^1[a,b] \quad \text{mit} \quad F_a'(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$$

Beweis: Konvergenz aus Mittelwertsatz für $b = \tilde{x}$

$$\int_a^{\tilde{x}+h} f(x)dx - \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx = \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+h} f(x)dx$$
$$\int_a^{\tilde{x}+h} f(x)dx - \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx = hf(z)$$
$$F_a(\tilde{x}+h) - F_a(\tilde{x}) \text{ für } F_a(\tilde{x}) \equiv \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx$$

Division durch h und Grenzübergang $h \to 0$ ergibt

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h} f(z) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(\tilde{x}+h) - F_a(\tilde{x})}{h}$$
$$\lim_{z \to \tilde{x}} f(z) = f(\tilde{x}) = \frac{d}{d\tilde{x}} F_a(\tilde{x}) = F_a'(\tilde{x})$$

Bemerkung *Unbestimmte* Integration einer Funktion $f(x)$ (dh. mit variablen Obergrenze $\tilde{x}$) ergibt eine Stammfunktion $F_a(\tilde{x}) = \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx$, die stetig differenzierbar ist und deren Ableitung genau : $f(\tilde{x})$ lautet. Also ist die Differentation die Umkehrung der unbestimmten Integration.

Bislang wurde mit $\tilde{x}$ die obere Schranke von der Integrationsvariable x unterschieden. Im Allgemeinen wird jedoch nur $F_a(x) = \int_a^x f(x)dx + C$, bzw. bleibt zudem a, die untere Schranke, unspezifiziert und deshalb wird häufig nur $F(x) = \int f(x)dx + C$ hingeschrieben, da für $a \neq \tilde{a}$ gilt :

$$F_a(\tilde{x}) - F_{\tilde{a}}(\tilde{x}) = \int_a^{\tilde{a}} f(x)dx \text{ ist konstant bezüglich } \tilde{x}$$

M.a.W. $F(x)$ bezeichnet irgendeine Funktion deren Ableitung $f(x)$ ist. C ist eine Konstante.

Bemerkung (Elementare Integrale)

Integrant v. $f(x)$	Stammfkt. $F(x) = \int f(x)dx + C$	Bedingung
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z}$; $n \neq -1$
x^{-1}	$\log(x) + C$	$x \in \mathbb{R}^+$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$; $x > 0$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a} + C$	$c \in \mathbb{R}$; $c \neq 0$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	

Aber:$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow F(x) = \int e^{-x^2} dx$ besitzt keine symbolische Darstellung durch den bislang bekannten Vorrat an elementaren Funktion. Als sogenannte Errorfunktion jedoch äußerst wichtig.

$$\text{Spezielle Funktion: } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

Gute Nachricht : Bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ lassen sich für beliebig komplizierte, aber hinreichend glatte Integranten $f(x)$ sehr effektiv und zuverlässig berechnen.

Beispiel $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} f(a) + \sum_{i=a}^{n-1} \underbrace{f(a+ih)}_{x_i} + \frac{h}{2} f(b)$ mit $h = \frac{(b-a)}{n}, n \in \mathbb{N}$

Satz 2.4 (Hauptsatz)
Jedes unbestimmte Integral, dh. für beliebiges a ist eine Stammfunktion von $f(x)$, dh. es gilt für $f \equiv F_a$

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \textit{ für } x \in]a, b[$$

Korollar 2.5
$F_a - F_{\tilde{a}}$ hat immer die Ableitung $\frac{d}{dx}[F_a - F_{\tilde{a}}] = f(x) - f(x) = 0$ und ist deshalb nach Mittelwertsatz der Differentialrechnung :

$$\textit{Schreibweise : } F(x) = \int f(x)dx + C \leftarrow \textit{ generische Konstante}$$

Lemma 2.6
Für beliebige Stammfunktion $F(x)$ und $f(x)$ gilt :

$$\int_a^b = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Beweis:

$$F(x) - F_a(x) = c \in \mathbb{R}, \text{ da beide Stammfunktionen :}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F_a(b) = F(b) - c = F(b) - F(a), \text{ da } F_a(a) = F(a) - c = 0$$

Beispiel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(\tfrac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) = 0 + 1 = 1$$

Bemerkung Während sich prinzipiell jede, als Zusammensetzung elementarer Funktionen, aus der Bibliothek $\equiv$ Alphabet ($E \equiv \{+,\ -\ ,\ *\ ,\ /, c,\ \sin\ ,\ \cos\ ,\ \exp\ ,\ \sqrt{x},\ \log\ ,\ \ldots\}$) definierte, Funktion $f(x)$ symbolisch differenzieren lässt, ist die Umkehrung, dh. die Bestimmung einer Stammfunktion $F(x) = \int f(x)$ fast nie möglich. M.a.W. : für nur ganz wenige $f(x)$ lässt sich auch $F(x)$, als Zusammensetzung elementarer Elemente in E, ausdrücken.

Beispiel $F(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)$ Wegen praktischer Bedeutung wurde dem skalierten unbestimmten Integral spezieller Namen gegeben.

§3 Partielle Integration und Substitutionsregel

Bemerkung Da Integration nach §2 im wesentlichen Umkehrung der Differentation ist, sollte man für jede Differentationsregel eine entsprechende Integrationsregel finden können:

Linearität $\equiv \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

Produktregel : $\Rightarrow$ Partielle Integration (auch theoretisch wichtig)

Kettenregel : $\Rightarrow$ Substitution der Integrationsvariable (trickreich!) $\Leftarrow$ CA - Systeme

Bemerkung (Herleitung der partiellen Integration) Produktregel für $H(x) = F(x)G(x)$, (Vereinbarung: $[F'(x) = f(x);\ H'(x) = h(x);\ G'(x) = g(x)]$)

$$h(x) = \frac{d}{dx} F(x)G(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \qquad H(x)\Big|_a^b = H(b) - H(a) = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx \qquad \text{nach Hauptsatz}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)G(x)dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$$

gilt vorausgesetzt : $f(x) \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow F(x) \in \mathcal{C}^1]a,b[$ und $G(x) \in \mathcal{C}^1]a,b[$. *Interpretation*: Ist ein Integrant zerlegbar in das Produkt $f(x)G(x)$, mit einem „einfach“ integrierbaren Faktor $f(x)$ und einem „einfach“ differenzierbaren Faktor $G(x)$, lohnt es sich im Allgemeinen die partielle Integration anzuwenden, dh. die Aufgabe $f(x)G(x)$ zu integrieren, durch das Auffinden einer Stammfunktion für $F(x)g(x)$. Dies ist wiederholt möglich.

Beispiel

$$\int_1^2 x \cdot \log(x)dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2 \log(x)}{2}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx$$
$$= 2\log(2) - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 2\log(2) - (1 - \frac{1}{4}) = 2\log(2) - \frac{3}{4}$$

Hinweis : für $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ kann C so gewählt werden, dass der Term $F(x)$ liquidiert wird oder sogar mehr von der gesammten Gleichung verschwindet.

Entsprechend für das unbestimmte Integral :

$$\int u(x)v(x)dx = \int uvdx = \left[\int udx\right] \cdot v - \int \left(\int u\right) v'dx \text{ oder } \int u'vdx = uv - \int uv'dx$$

Beispiel

$$\int \log(x)dx = \int 1 \cdot G(x)\log(x)dx = x \cdot log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\log(x) - x + C$$

Probe: $\frac{d}{dx}(x\log(x) - x + C) = 1 \cdot \log(x) + x(\frac{1}{x}) - 1 + 0 = \log(x)$

Beispiel

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(X)dx =$$
$$e^x \sin(x) - (e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)dx$$
$$2\int e^x \sin(x)dx = e^x(\sin(x) - \cos(x))$$
$$\int e^x \sin(x)dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))$$

Beispiel (zur wiederholten Anwendung von partieller Integration)

$$\begin{array}{rrcl}
n > 0: & \int \sin^n xdx & = & \int \sin x \cdot \sin^{n-1} xdx \\
& \int \sin^n xdx & = & -\cos x \cdot \sin^{n-1} x - \int -\cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x \\
& \int \sin^n xdx & = & -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \\
& \int \sin^n xdx & = & -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x - (n-1)\int \sin^n x \\
& n\int \sin^n xdx & = & -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \\
& \int \sin^n xdx & = & \frac{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + (1-\frac{1}{n})\int \sin^{n-2} x \\
& \int \sin^n xdx & = & \frac{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + (1-\frac{1}{n})\frac{-\cos x \cdot \sin^{n-3} x}{n} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n-2})\int \sin^{n-4} x
\end{array}$$

Wiederholte Reduktion des Exponenten ergibt schließlich für den letzten Term $\int \sin xdx = -\cos x$ falls n gerade ist bzw wen n ungerade ist: $\int \sin^0 xdx = x$.

Bemerkung (Herleitung der Substitutionsregel aus der Kettenregel) Seien

$$f(x) = F'(x)\ ,\ g(x) = G'(x)\ ,\ h(x) = H'(x) \text{ und } H(x) = G(F(x))$$

Die Kettenregel der Differentiation besagt, dass $h(x) = H'(x) = [G(F(x))]' = g(F(x)) \cdot f(x)$. Nach dem Hauptsatz erfüllt $H(x)$ als Stammfunktion von $h(x)$: $\int_a^b h(x)dx = H(x)|_a^b$. Also gilt:

$$\int_a^b g(F(x)) \cdot f(x)dx = \int_a^b h(x)dx = H(x)|_a^b = H(b) - H(a) = G(F(b)) - G(F(a)) = G(y)|_{F(a)}^{F(b)}$$
$$= \int_{F(a)}^{F(b)} g(y)dy$$

In Leibniz-Notation: mit

$$y = F(x) \Rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{dy}{dx} : \int_a^b g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int_{F(a)}^{F(b)} g(y)dy$$

Die ursprüngliche Integrationsvariable dx wird also durch die Integrationsvariable dy ersetzt (substituiert) nachdem es gelingt den Faktor $f(x) = \frac{dy}{dx}$ vom Integranden abzuspalten. Bei bestimmten Integralen müssen außerdem die Integrationsgrenzen angepasst werden. Für unbestimmte Integrale gilt:

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(y)dy$$

Beispiel (zur Substitution bei bestimmtem Integral)

$$\int_1^x \frac{1}{x}\ln^2(x)dx$$

Substitution: $y = \ln(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\int_1^x \frac{1}{x}\ln^2(x)dx = \int_0^{ln(x)} y^2 dy = \frac{1}{3}y^3|_0^{ln(x)} = \frac{1}{3}\ln^3(x)$$

Beispiel (zur affinen Beziehung bei der Standardsubstitution)

$$\int_a^b g(ex+c)dx$$

Substitution: $y = ex + c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e$

$$\int_a^b g(ex+c)dx = \frac{1}{e}\int_a^b g(ex+c)e dx = \frac{1}{e}\int_{ea+c}^{eb+c} g(y)dy$$

Beispiel (zur „Gegenrichtung“ mit „trigonometrischer Substitution“)

Sei $0 \leq y \leq 1$. Bei $\displaystyle\int_0^y \sqrt{1-y^2}dy$ substituiere $y = \sin(x)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = cos(x)$

$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$:

$$\int_0^x \sqrt{1-\sin^2(x)}cos(x)dx = \int_0^x cos^2(x)dx = \int_0^x 1dx - \int_0^x sin^2(x)dx$$

$$= x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}2\sin(x)\cdot\cos(x) = \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}$$