Stand des Dokuments: 22.02 2009
Bearbeitet von
Tom Streubel, Ngyuen Thi Ha, Jennifer Gehrke, Alexander Zimmermann,
Frank Winkler, Jan Petsche, Erik Ludwig, Janila Ruck, Paul Boeck

Analysis I*
Professor Ph. D. A. Griewank,
Dr. L. Lehmann

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen

§0 Aussagenlogik

Definition:

- **Aussagen**: sprachliche Gebilde, die wahr oder falsch, aber nicht jedoch beides, sein können.
- **Junktoren**: verknüpfen Aussagen zu komplexeren Aussagen. Junktoren sind:

  $\neg$ *Negation* negiert oder nicht

  $\vee$ *Dissjunktion* oder, $\wedge$ *Konjunktion* und

  $\Leftarrow$, $\rightarrow$ *Implikation* daraus folgt oder impliziert

  $\iff$ *Äquivalenz* genau dann wenn.
- **Aussagenlogik** beschäftigt sich mit allg. Prinzipien des korrekten Argumentierens und Schließens mit Aussagen und deren Kombinationen.

Satz: Logische Äquivalenzen (Rechenregeln)

- (0) $x \wedge 1 \iff x \iff x \vee 0, x \wedge 0 \iff 0, x \vee 1 \iff 1$
- (i) $x \wedge x \iff x \iff x \vee x$ Idempotenz
- (ii) $x \wedge y \iff y \wedge x$, $x \vee y \iff y \vee x$ Kommutativität
- (iii) $(x \wedge y) \wedge z \iff x \wedge (y \wedge z)$, $(x \vee y) \vee z \iff x \vee (y \vee z)$ Assoziativität
- (iv) $(x \wedge y) \vee z \iff (x \vee z) \wedge (y \vee z)$, $(x \vee y) \wedge z \iff (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ Distributivität
- (v) $(\neg(\neg x)) \iff x$, $x \vee (\neg x) \iff 1$
- (vi) $\begin{array}{l} \neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B) \end{array}$ De Morgansche Regel

§1 Mathematische Beweisverfahren

Bemerkung: Beweisverfahren:

1. direkter Beweis (Voraussetzung V $\rightarrow$ Behauptung B)
2. indirekter Beweis $\neg B \rightarrow \neg V$
3. Widerspruchsbeweis, wie indirekter Beweis wenn V trivial ist
4. Induktion (IA (Induktionsanfang), IS(Induktionsschritt): IV (I.-Voraussetzung) und IB (I.-Behauptung))

Definition: Eine Menge heisst **wohlgeordnet** durch eine strenge Ordnungsrelation
$x < y \iff (x, y) \in \mathbb{R} \subset M \times N$, falls $\forall \{x, y, z\} \subset M$

- $x \nless x$ Irreflexivität
- $x < y$, $y < z \rightarrow x < z$ Transitivität
- $(x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ Trichotomie

- Für jede nichtleere Teilmenge: $N \subseteq M$: $\exists$ ein kleinstes/minimales Element $n \in N$, so dass $m \in N \rightarrow (m > n) \vee (n = m) \iff n \leq m$

Bemerkung: Die natürlichen Zahlen und alle endlichen Teilmengen haben diese Eigenschaft. Sie läßt sich erweitern auf überabzählbare Ordnungszahlen.

Satz: Für M wohlgeordnet und A: $M \rightarrow \{0\ ,\ 1\}$ gilt:
$\forall n \in M\ (m \in M : m < n \rightarrow A(m) = 1) \rightarrow A(n) = 1$
in Worten: falls für beliebiges $n \in M$ aus $A(m) = 1\ \forall\ m < n$ folgt: dass auch $A(n) = 1$, dass gilt: $A(n) = 1$ $\forall\ n \in M$. (Prinzip der vollständigen Induktion)

Beispiel: Bernoulli Ungleichung : $(1+h)^n \geq 1+nh$

2. Der reelle Körper

Bemerkung:
Mengen $\rightarrow$ geordnete Paare $\rightarrow$ Kartesische Produkte $\rightarrow$ Relationen $\rightarrow$ **Funktionen**
Außerdem: *Relationen* $\rightarrow$ (*Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen*)

Bemerkung Strukturen: bestehen aus Mengen, ausgezeichneten Elementen und Funktionen z.B. $(\mathbb{N}, 1, n)$; $1 \in \mathbb{N}$ das ausgezeichnete Element, $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Nachfolgerelation

Bemerkung: Die Addition $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wird rekursiv definiert:
$a(x, 1) := n(x)$ also: x+1 ist der Nachfolger von x
$a(x, n(y)) := n(a(x, y))$ x plus Nachfolger von y ist Nachfolger von x+y

§2 Die reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

ist nachzulesen im Hefter; Dieser Paragraph teilt sich nicht in Sätzen und Definitionen und ist an sich nur eine Einleitung in die Herleitung der reellen Zahlen.

Bemerkung: Das Komplement $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ heißt Menge der irrationalen Zahlen, die sich weiter aufteilen in

- die Menge der (irrationalen) algebraischen Zahlen
- die Menge der transzendenten Zahlen

§3 Die Körperaxiome

Definition: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bilden jeweils **Körper** im folgenden Sinne:
Axiomengruppe I: Additive Gruppeneigenschaften
$\exists$ eine Abbildung $+ : K \times K \rightarrow K$ und $+(x, y) = x + y$, so dass gilt:

- (I.1) $\forall x, y, z \in K : (x+y)+z = x+(y+z)$ Assoziativität
- (I.2) $\forall x, y \in K : x+y = y+x$ Kommutativität
- (I.3) $\exists 0 \in K\ \forall x \in K : x+0 = x$ Nullelement
- (I.4) $\forall x \in K\ \exists y \in K : x+y = 0,\ y = -x$ Negatives Element

Axiomengruppe II: Multiplikative Gruppeneigenschaften
$\exists$ eine Abbildung $\cdot : K \times K \to K$ und $\cdot(x,y) = x \cdot y$, so dass gilt:

- (I.1) $\forall x,y,z \in K : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ Assoziativität
- (I.2) $\forall x,y \in K : x \cdot y = y \cdot x$ Kommutativität
- (I.3) $\exists 1 \in K\ \forall x \in K : x \cdot 1 = x$ Einselement
- (I.4) $\forall x \in K, x \neq 0\ \exists y \in K : x \cdot y = 1$; $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ Negatives Element

Axiomengruppe III: Distributivgesetz

- (III.1) $\forall x,y,z \in K : (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

Bemerkung: In $\mathbb{Z}$ gelten alle diese Axiome außer II.4. Eine solche Struktur heißt **Ring**.
$\mathbb{N}$ verletzt sogar auch I.3 und I.4 und $\mathbb{N}$ heißt **Semiring**.

Satz: Die neutralen und die inversen Elemente bezüglich der Addition und Multiplikation in einem Körper sind eindeutig bestimmt. Daraus folgt auch die eindeutige Lösbarkeit der linearen Gleichung: $a + b \cdot x = c$ für gegebene $a,b,c \in K, b \neq 0$ und gesuchtes $x \in K$.

Bemerkung: Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind sog. binäre Operationen. $-x$ und x^{-1} sind unäre Operationen.

Satz: Verallgemeinerung der Assoziativität und Kommutativität auf endliche Summen und Produkte für Tupel von n Zahlen $(a_j)_{j=1}^n \in K^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = ((((a_1 + a_2) + a_3) + \dots) + a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j\right) + a_n$$
$$\prod_{j=1}^{n} a_j = ((((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots) \cdot a_n) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j\right) \cdot a_n$$

Durch diese rekursive Definition wird induktiv bewiesen, dass das Produkt bzw. die Summe von $(a_j)_{j=1}^n \in K^n$ wohldefiniert ist.

Lemma: Verallgemeinerung der Distributivität

$$\forall b \in K ; b \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (b \cdot a_j)$$

Satz: Allgemeine Summen- und Produktnotation
$$\sum_{j=m}^{n} a_j := \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-m+1} a_{m+j-1} & \text{falls } n \geq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\prod_{j=m}^{n} b_j := \begin{cases} \prod_{j=1}^{n-m+1} b_{m+j-1} & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
Spezialfall: $n! = \prod_{j=1}^{n} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = [(n-1)!] \cdot n$

Definition: Binomialkoeffizienten für k,n $\in \mathbb{N} \cup 0$
$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) = \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1)$

Lemma: Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

- (i) $\binom{n}{k} \neq 0 \iff 0 \leq k \leq n \to \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- (ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

§4 Anordnung, Absolutbetrag und Max, Min

Anordnungsaxiome IV:

- (IV.1) $(x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ Trichotomie
- (IV.2) $(x < y) \wedge (y < z) \to (x < z)$ Transitivität
- (IV.3) $(x < y) \wedge (z \in \mathbb{R}) \to (x + z < y + z)$ Monotonie der Addition
- (IV.4) $(x < y) \wedge 0 < z \in \mathbb{R} \to (zx < zy)$ Monotonie der Multiplikation

Bemerkung: Der Absolutbetrag ist definiert als $|x| := \begin{cases} x \text{ , falls } x \geq 0 \\ -x \text{ , falls } x < 0 \end{cases}$

Lemma: Eigenschaften des Betrages

- (0) $|x| = 0 \iff x = 0$ Definitheit
- (i) $|xy| = |x||y|$ Homogenität
- (ii) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung
- (iii) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$ inverse Dreiecksungleichung

Definition: Maximum undMinimum
$\max(x,y) = \begin{cases} x \text{ , falls } x \geq y \\ y \text{ , falls } x \leq y \end{cases}$ $\min(x,y) = \begin{cases} x \text{ , falls } x \leq y \\ y \text{ , falls } x \geq y \end{cases}$

Bemerkung: Es gibt kein neutrales Element bez. min und max, aber Maximum und Minimum sind assoziativ und kommutativ und es gilt das "Distributivgesetz":
$\max(\min(x,y),z) = \min(\max(x,z),\max(y,z))$ und
$\min(\max(x,y),z) = \max(\min(x,z),\min(y,z))$

Bemerkung: min und max sind erweiterbar auf endliche Argumenttupel

§5 Vollständigkeit der reellen Zahlen

Definition: Sei $M \subset K$ Teilmenge eines Körpers. $s \in K$ heißt **obere Schranke** von M falls $\forall a \in M$ gilt $a \leq s$. M heißt nach oben beschränkt falls ein solches s existiert, sonst nach oben unbeschränkt. $t \in K$ heißt **untere Schranke** von M falls $\forall a \in M$ gilt $a \geq t$. M heißt nach unten beschränkt falls ein solches t existiert, sonst nach unten unbeschränkt.

Definition: Eine obere Schranke s heißt **kleinste obere Schranke** (Supremum), falls gilt: $s \leq s'$, für alle oberen Schranken s' von M, man schreibt: $\sup(M) = s$. Ist t die größte untere Schranke (Infimum) von M, so schreibt man: $\inf(M) = t$.

Bemerkung: $s = \sup(M) = \max(M)$, falls $\sup(M) \in M$.
Bzw. $t = \inf(M) = \min(M)$, falls $\inf(M) \in M$.

Anordnungsaxiome V:
In $\mathbb{R}$ hat jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum.

Bemerkung: $\inf(M) = -\sup(-M)$

Anmerkung: verbleibende Anordnungsregeln sind in der ersten Ergänzung zur VL Analysis I* zu entnehmen.

Satz: Existenz und Monotonie von Wurzeln
Für $0 < c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $0 \leq x \in \mathbb{R}$, so dass $x^n = c$. Dieses x wird mit $\sqrt[n]{c}$ bezeichnet und ist monoton bezgl. c, d.h. $c' \geq c \rightarrow \sqrt[n]{c'} \geq \sqrt[n]{c}$

Bemerkung: Der Existenzbeweis für Wurzeln ist nicht konstruktiv, daher der Beweis gibt nicht an, wie für konkretes $c > 0$ sich die Wurzel berechnen lässt. Damit kann/muss diese beliebig durch bestimmte Verfahren angenähert werden.
Beispiel: Für $n = 2$ ergibt sich mit dem Newton-Verfahren eine Beliebige Näherung durch die rekursive Folge
$x_{k+1} := \frac{x_k + \frac{c}{x_k}}{2}$ bzw. Allgemein für beliebiges n: $x_{k+1} := \frac{(n-1)x_k + \frac{c}{x_k^{n-1}}}{n}$

3. Konvergenzverhalten von Folgen und Reihen

§6 Folgen und Konvergenz

Definition: Abstrakt ist eine reelle **Folge** eine Abbildung f von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, wobei üblicherweise direkt die Bilder angegeben werden ($x_n = f(n) \in \mathbb{R}$).
Die Gesamtfolge wird wie folgt hin geschrieben: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (x_n) oder ...

Definition: Eine Folge (x_n) ist **konvergent**, gegen a, falls :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon$$

Falls ein solches a existiert heißt die Folge konvergent, sonst divergent.

Bemerkung: Die Definition ist eindeutig, da (x_n) nur ein Grenzwert haben kann.

Bemerkung: Zwei Folgen $(x_n) = x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots$ und $(x'_n) = x'_1, x'_2, \ldots$ heißen äquivalent, wenn für ein festes m und alle n gilt: $x'_n = x_{m+n}$, also $x'_1 = x_m; x'_2 = x_{m+1}$; usw.

Lemma: Jede konvergente Folge ist beschränkt in dem Sinne das die Menge
$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = f(\mathbb{N})$ beschränkt ist, also eine untere und obere Schranke besitzt.

Definition: Die Folge (x_n) heißt **monoton steigend** bzw fallend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$x_n \leq x_{n+1}$ bzw $x_n \geq x_{n+1}$

Satz: Jede monoton steigende, nach oben beschränkte bzw monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert gegen $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ bzw $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Bemerkung: rekursive Bildungsvorschriften, werden auch als Iterationen bezeichnet.

§7 Grenzwertsätze

Satz 7.1: Falls (x_n) und (y_n) gegen a bzw. b konvergieren, gilt:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$; Additivität

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$; Homogenität

Additivität und Homogenität zusammen bezeichnet man als Linearität

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n / \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a/b$, falls $b \neq 0$

Satz 7.2: Monotonie des Grenzwertes
Falls $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig, so folgt aus $x_n \leq z_n \leq y_n$, für $n \in \mathbb{N}$, dass $a = \lim_{n\to\infty} x_n \leq b = \lim_{n\to\infty} y_n$
und falls sogar $a = b \to a = b = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Lemma 7.3: Folgeneigenschaft von $\sup(M)$ und $\inf(M)$
$\forall M \subseteq \mathbb{R}$ gilt $s = \sup(M) \iff s \geq x$ für alle $x \in M \wedge \exists (x_n) \subset M.\ \lim x_n = s$.
Entsprechend auch für $\inf(M)$

Bemerkung: o.B.d.A kann eine Folge (x_n) monoton wachsend, bzw. fallend, für $\inf(M)$ gewählt werden.

Definition: Nullfolge und uneigentliche Grenzwerte

- (I) $(x_n) \in \mathbb{R}$ heißt Nullfolge, falls $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, Summen und Produkte von Nullfolgen, haben dieselbe Eigenschaft
- (II) $(x_n) \in \mathbb{R}$ divergiert gegen ∞, im Zeichen $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) : \forall n \geq n(\varepsilon) : x_n > \frac{1}{\varepsilon}$
- (III) $(x_n) \in \mathbb{R}$ divergiert gegen $-\infty$, im Zeichen $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, im Sinne von (II)

Lemma 7.4: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \vee \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$

Bemerkung: Die Umkehrung von **Lemma 7.4** gilt nicht.

Bemerkung: Grenzwertsätze sind auf uneigentliche Grenzwerte erweiterbar:

$$\text{dh. } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty = \lim_{n\to\infty} y_n \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} z_n = c \in \mathbb{R}$$

dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty \wedge \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm z_n) = \infty \wedge \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot z_n) = sign(c) \cdot \infty, \text{ falls } c \neq 0$$

aber undefiniert sind:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot z_n) = ?, \text{ falls } c = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = ?$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n / y_n) = ?$$

§8 Teilfolgen, Bolzano–Weierstraß, Cauchy–Kriterium

Bemerkung 8.1: Aus Konvergenz folgt Beschränktheit, umgekehrt gilt dies nicht, aber aus der Konvergenz folgt auch die Existenz vom einzigen Häufungspunkt, dem Grenzwert,
(für Häufungspunkt siehe nächste **Definition 8.2.(II)**) und aus der Existenz genau eines Häufungspunktes und der Beschränktheit folgt wiederum die Konvergenz.

Definition 8.2: Häufungspunkte und Teilfolgen

- (I) $\tilde{x}_n \subset \mathbb{R}$ heißt **Teilfolge** von $(x_n) \subset \mathbb{R}$, falls es eine streng monotone steigende Indexfunktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mit $\tilde{x}_n = x_{h(n)} = x_{n_h} \leftarrow$ Doppelindex
- (II) s heißt **Häufungspunkt** (clusterpoint), falls $s = \lim_{n\to\infty}(\tilde{x}_n)$ für eine Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ von ursprünglichem (x_n) ist.

Bemerkung: Sehr häufig wird Indexfunktion $h(n)$ nicht explizit wiedergegeben, sondern $(\tilde{x}_n)$ wird mittels beliebigem Kriteriums aus den Gliedern von (x_n) ausgewählt(z.b alle postiven Glieder einer Folge). Dann ist nicht immer klar, dass die Teilfolge wirklich unendlich viele Glieder enthält. Das muss dann gegebenenfalls verifiziert werden.

Satz 8.3: Direkte Charakterisierung von Häufungspunkten
$a \in \mathbb{R}$ ist H.P. einer Folge $(x_n) \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \subset \mathbb{N}, \mathrm{card}(M) = \infty : \forall m \in M : |x_m - a| < \varepsilon \tag{1}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists m > n : |x_m - a| < \varepsilon \tag{2}$$

bzw.
$a \in \mathbb{R}$ ist kein H.P. einer Folge $(x_n) \iff$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \subset \mathbb{N}, \mathrm{card}(M) = \infty : \exists m \in M : |x_m - a| \geq \varepsilon \tag{3}$$

$$\iff \exists \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n : |x_m - a| \geq \varepsilon \tag{4}$$

Lemma 8.4:

- (I) Jede Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ einer gegen a konvergenten Folge (x_n) hat genau denselben Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = a$
- (II) Jede Folge hat mindestens eine monotone Teilfolgen, die steigend oder fallend sein kann.

Satz 8.5: Bolzano–Weierstraß
Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge und damit mindesten einen Häufungspunkt.

Satz 8.6: lim sup und lim inf
Für eine nach oben beschränkte Folge x_n bezeichne mit $H \subset \mathbb{R}$ die Menge aller seiner Häufungspunkte. Dann hat H ein Supremum, welches sogar als Maximum angenommen wird und mit Limes superior bezeichnet wird.
Man schreibt $\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup(H) = \max(H)$
Entsprechend gilt dies auch für eine nach unten beschränkte Menge.
$\liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf(H) = \min(H)$

Lemma 8.7: Direkte Charakterisierung von lim sup und/oder lim inf
$s = \limsup_{n\to\infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) : \forall m \geq n(\varepsilon) : x_m < s + \varepsilon$
und s ist minimal bzgl. dieser Eigenschaft
Mit anderen Worten: Fast alle (=alle bis auf endlich viele) Folgenglieder sind durch $s+\varepsilon$ nach oben beschränkt für beliebiges ε.

Bemerkung: Auch lim sup und lim inf erfüllen bestimmte Rechenregeln ähnlich wie Grenzwerte, die ihre Auswertung oder ihre Abschätzung ermöglichen.

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \pm \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$; Subadditivität

(ii) $c > 0 \to \limsup\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n = c \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$; Positive Homogenität

(ii') $c > 0 \to \limsup\limits_{n\to\infty}(c + x_n) = c + \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

(iii) $c < 0 \to \limsup\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n = -c \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} -x_n = c \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$

(iv) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0 \vee \liminf\limits_{n\to\infty} y_n \geq 0 \to \limsup\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$

(v) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0 \wedge \liminf\limits_{n\to\infty} y_n = b > 0 \to \limsup\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) \leq \frac{1}{b} \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

Satz 8.8: Eine Folge konvergiert $\iff$ Die Folge ist eine Cauchy-Folge und besitzt also folgende Eigenschaft : $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall m, m' \geq n(\varepsilon) : |x_m - x_{m'}| < \varepsilon$

§9 Unendliche Reihe

Definition: Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ bezeichnet man $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ für festes n_0 und $n \in \mathbb{N}$, als die Folge der **Partialsummen**. Falls die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$
Die rechte Seite nennt man **unendliche Reihe**.

Satz 9.1: Cauchy–Kriterium für Reihen: Eine Reihe $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergiert $\iff$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall m' \geq m' \geq n(\varepsilon) : \left|\sum\limits_{k=m+1}^{m'} a_k\right| < \varepsilon$

Satz 9.2: Divergenz und Konvergenz der allgemeinen harmonischen Reihe

$$c \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\};\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} = \begin{cases} \infty & \text{falls } c \leq 1 \\ g \in]0,\infty[& \text{falls } c > 1 \end{cases}$$

Bemerkung: Ein notwendiges aber nicht hinreichendes Konvergenzkriterium der Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist das (a_n) eine Nullfolge ist.

Satz 9.3: Leibnizkriterium
Eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (mit $a_k \cdot a_{k+1} < 0 \forall k \in \mathbb{N}$), für die die Beträge $|a_n|$ eine monoton fallende Nullfolge bilden, ist konvergent.

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 9.4: Gewöhnliche Konvergenz folgt aus absoluter Konvergenz. Letzteres ist äquivalent zur Existenz einer Schranke c, so dass $c \geq \sum_{k \in J} |a_k|$, für beliebiges endliches $J \subset \mathbb{N}$.

Lemma 9.5: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_{h(k)}$ absolut konvergent ist, für eine beliebige Bijektion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. MaW.: Absolut konvergente Reihen können also beliebig umsortiert werden.

Bemerkung: Die meisten Konvergenzkriterien für Reihen stellen die stärkere Eigenschaft der absoluten Konvergenz sicher.

Satz 9.6: Eine Reihe muss absolut konvergent sein und somit ein Grenzwert haben, falls sie folgende Kriterien erfüllt:

$$\begin{aligned}
&\text{(i) Majorantenkriterium} : \forall k \in \mathbb{N} : |a_k| \leq b_k \text{ mit } \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \\
&\qquad \sum b_k \text{ ist Majorante für } \sum |a_k| \\
&\text{(ii) Quotientenkriterium} : q = \limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \\
&\text{(iii) Wurzelkriterium} : r = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1
\end{aligned}$$

§10 b-adische Zahlendarstellung und Überabzählbarkeit der Reellen Zahlen

Definition 10.1: Mit $z_{-m} z_{-m+1} \dots z_0 \,,\, z_1 z_2 z_3 \dots$ werden die Reihen

$$\sum_{k=-m}^{\infty} z_k b^{-k} \tag{5}$$

bezeichnet.

Bemerkung: Hierbei gelten folgende Festlegungen

- $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
- $m \in \mathbb{N}_0$
- $(z_{k-m})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \{0, 1, \dots, b-1\}$
- $z_{-m} = 0 \to m = 0$
- $\liminf_{k \to \infty} z_k \neq b - 1$

Man nennt b auch die **Basis** der b-adische Zahlendarstellung.

Lemma 10.2: Die Reihen $\sum_{k=-m}^{\infty} z_k b^{-k}$ konvergieren.

Satz 10.3: Jedes $x \in \mathbb{R}$ hat eine eindeutige Darstellung $z_{-m} z_{-m+1} \dots z_0 \,,\, z_1 z_2 z_3 \dots$ so dass

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} z_k b^{-k} \tag{6}$$

Definition 10.4: Eine Menge M ist **abzählbar** gdw. M ist endlich oder es gibt eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und M.
Ist M abzählbar und unendlich dann ist M **abzählbar unendlich**. Ist M nicht abzählbar dann ist M **überabzählbar**.

Satz 10.5: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

§11 Anwendung Wurzelkriterium und Quotientenkriterium

Lemma 11.1:

$$\text{(i) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
$$\text{(ii) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \text{ falls } a > 0$$
$$\text{(iii) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(n)|} = 1, \text{ falls } P(n) = \sum_{j=0}^{m} c_j n^j \neq 0$$

Lemma 11.2: Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ erfüllt genau dann das Quotientenkriterium, wenn dies für $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \frac{P(j)}{Q(j)}$ für beliebige Polynome P, Q gilt.

Satz 11.3: Vergleich von Wurzelkriterium und Quotientenkriterium
r, q seien die entsprechenden Werte aus **Satz 9.6**.

- (i) $r \leq q$ mit $r = q$, falls $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$
- (ii) $r > 1$ impliziert Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Bemerkung: Wurzelkriterium ist genauer als Quotientenkriterium.

Definition: Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge von Koeffizienten und $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Variable heißt $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ oder $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine **Potenzreihe** (am Punkt x_0).

Satz 11.4: Konvergenzradius von reellen Potenzreihen
Falls $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ dann konvergiert die Potenzreihe
$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut $\forall x \in]-\rho, \rho[$, wobei der **Konvergenzradius**
ρ gegeben ist durch $\rho = \begin{cases} \frac{1}{r}, \text{ falls } r > 0 \\ \infty, \text{ falls } r = 0 \end{cases}$.

Bemerkung: Die Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius bilden einen linearen Vektorraum.

Lemma 11.5: Falls $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ die Konvergenzradien $\rho_1 > 0$ und $\rho_2 > 0$ haben, dann hat die Linearkombination
$R(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$, für beliebige Konstanten α, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Konvergenzradius $\rho \geq \frac{1}{2} \min(\rho_1, \rho_2) > 0$

Bemerkung: Innerhalb ihres absoluten Konvergenzbereiches können Potenzreihen beliebig genau, durch endliche Partialsummen, angenähert werden.

Satz 11.6: Restgliedabschätzung
Hat $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den positiven Konvergenzradius $\rho > 0$, dann existiert für jedes $n > 0$ und $\tilde{\rho} < \rho$ ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $|P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| \leq c|x|^n$ für $x \in [-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}] \subset [-\rho, \rho]$

Lemma 11.7: Falls $P(x)$ positiven Konvergenzradius hat,
dann existiert ein $\hat{\rho} \in \ ]0,\tilde{\rho}[\ \subset \ ]0,\rho[$, so dass $x \in]-\hat{\rho},\hat{\rho}[\rightarrow P(x) \neq 0 \vee (x = 0 \wedge a_0 = 0)$

Satz 11.8: Identitätssatz von Potenzreihen
Falls $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ einen positiven Konvergenzradius haben und an einer Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \neq x_n$ übereinstimmen, in dem Sinne dass $P(x_n) = Q(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Definition: Für zwei Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, bezeichnet die Reihe
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, mit $c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$, als ihr **Cauchy-Produkt**.

Satz 11.9: Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren und mindestens eine der beiden Reihen absolut konvergiert, dann konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt.

4. Stetigkeit

§12 Stetigkeit reeller Funktionen

Definition 12.1: Stetigkeit in einem Punkt x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D : |x_0 - y| < \delta \rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung: f ist stetig auf D, falls f stetig in jedem Punkt auf D.

Definition 12.2: Lipschitzstetigkeit
$D \subseteq \mathbb{R}$; $f : D \rightarrow \mathbb{R}$; $x \in D$
lokal lipschitzstetig: Es gibt ein $L > 0$ und ein $r > 0$, so dass

$$\forall y,z \in (x-r, x+r) : |f(y) - f(z)| \leq L \cdot |y - z| \tag{7}$$

lipschitzstetig auf D:

$$\exists L > 0 \forall x,y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \tag{8}$$

Lemma 12.3: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig in $x \in D$, dann ist f auch stetig in x.

Lemma 12.4: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 2$, ist die n-te Potenzfunktion $f(x) = x^n$ lokal Lipschitz-stetig.

Bemerkung 12.5: Jede Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ist lokal Lipschitz-stetig in jedem $x \in \mathbb{R}$

Satz 12.6: Nullstellensatz
Seien $a < b$ und $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann gibt es ein $x^* \in [a,b]$, mit $f(x^*) = 0$

Bemerkung 12.7: Sei f ein Polynom ungerade Grades n,
spezieller : $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in [-1,1]$, dann hat f eine Nullstelle $\in [-1,1]$

Bemerkung 12.8: Wurzelfunktionen
Für alle $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, ist die Gleichung $x^n - a = 0$, mit $x \geq 0$, eindeutig lösbar.

Definition 12.9: Die einzige Lösung x, der Gleichung $x^n - a = 0$, wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

Lemma 12.10: Die Wurzelfunktionen sind stetig.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ ist $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) : \sqrt[n]{x}$, stetig

Satz 12.11: äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit
$f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$
Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- f ist in x_0 stetig
- Für jede Folge (x_n) aus D, mit $x_n \to x_0$, gilt $f(x_n) \to f(x_0)$

Bezeichnungen : Seien $f, g \subset \mathbb{R}$, mit $f : D \to \mathbb{R}$, dann definiert man $\forall x \in D$:

- $f \pm g$ durch $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $f \cdot g$ durch $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- f/g durch $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, falls $g(x) \neq 0$

Bemerkung: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

Satz 12.12: (Rechenregeln)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, dann sind auch:

- $f \pm g$ stetig in x_0
- $f \cdot g$ stetig in x_0
- f/g stetig in x_0, falls $g(x) \neq 0$

Satz 12.13: Kompositionen von Funktionen
Seien $g : D \to \mathbb{R}$ und $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Im}(g) \subseteq E$ und g stetig in $x_0 \in D$,
f stetig in $g(x_0) \in E$, mit $(E, D \subset \mathbb{R})$
Dann ist $f \circ g$ stetig in x_0

Satz 12.14: (Weierstraß)
Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt (dh. abgeschlossen und beschränkt) und sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig auf K, dann existiert ein x^*, x_*, mit
$f(x^*) = \max f(x), f(x_*) = \min f(x)$

Bemerkung:

- K kompakt bedeutet : K ist Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle
- Der Satz gilt nicht für (halb-)offene oder uneigentliche Randpunkte des Intervalls (wie etwa $+\infty$)

Definition 12.15: gleichmäßige Stetigkeit
$f : D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung:

- Jede glm. stetige Funktion auf D ist auch stetig auf D
- Jede Lipschitzstetige Funktion ist auch glm. stetig
- Es gibt stetige Fkt., die nicht glm. stetig sind

Satz 12.16: (Heine, Borel)
Sei $f : K \to \mathbb{R}$, K kompakt und f stetig auf K, dann ist f auch glm. stetig auf K.

§13 Verallgemeinerung von Stetigkeitsverhalten auf $\mathbb{R}^n$

Definition: Als Verallgemeinerung des Betrages $|x|$ für $x \in \mathbb{R}^1$ gilt die Euklidische Norm:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{n} \left|x^{(k)}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n$$

Lemma 13.1: Eigenschaften der euklidischen Norm:

$$\begin{aligned}
&\|x\| = 0 \iff x = 0 && \text{Definiertheit}\\
&\|\gamma x\| = |\gamma|\|x\| \text{ mit } \gamma \in \mathbb{R} && \text{Homogenität}\\
&\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\| && \text{Dreiecksungleichung}\\
&\iff \|x \pm y\| \geq |\|x\| - \|y\|| &&
\end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x^{(k)} y^{(k)}\right| \leq \|x\|\|y\|$$

Definition: Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvergent, wenn es ein $x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right)$ gibt, so dass

$$\begin{aligned}
&\|x_k - x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \iff \|x_k - x\|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\\
\iff &\sum_{i=1}^{n} \left|x_k^{(i)} - x^{(i)}\right|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \iff x_k^{(i)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^{(i)} \text{ für } i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Man schreibt dann kurz: $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.
MaW: Folge von Tupeln oder Vektoren $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, gdw. jede der n Komponentenfolgen konvergiert.

Definition: Eine Untermenge $D \subset \mathbb{R}^n$ wird bezeichnet als

(i) abgeschlossen , falls gilt:Wenn $(x_k) \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ dann $x \in D$.
MaW jeder Häufungspunkt einer Folge aus D gehört zu D

(ii) offen falls $D^C = \mathbb{R}^n \backslash D \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin D\}$ abgeschlossen.

(iii) beschränkt , falls $\sup\{\|x\| : x \in D\} < \infty$

(iv) kompakt , falls (i) und (iii)

(v) konvex , falls für alle $x, y \in D$ und $\alpha \in [0,1]$ auch $\alpha x + (1-\alpha)y \in D$

Lemma 13.2: Vereinigung/Durchschnitt
Seien $D, E \subset \mathbb{R}^n$.

(i) wenn D, E abgeschlossen, dann $D \cup E$ und $D \cap E$ abgeschlossen. Das überträgt sich per Induktion auf endlich viele.

(ii) D und E offen $\rightarrow D \cup E$ und $D \cap E$ offen

(iii) D und E beschränkt $\rightarrow D \cup E$ und $D \cap E$ beschränkt

(iv) D und E konvex $\rightarrow D \cap E$ konvex (aber NICHT $D \cup E$)

Definition: Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

(i) stetig an einem Punkt $x \in D$, falls $\forall (x_n) \in D$ mit $x_n \rightarrow x : \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$

(ii) stetig auf der Menge D, falls stetig auf allen $x \in D$. Man bezeichnet die Menge aller auf D stetigen Funktionen mit $C(D)$ (C für continuous).

(iii) Eine Vektorfunktion $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig an $x \in D$ gdw. jede der Komponenten der Funktion $F^{(i)}(x)$ die Eigenschaft haben.
$F = \left(F^{(1)}(x), F^{(2)}(x), \ldots, F^{(m)}(x)\right) \in C(D) \iff F^{(i)} \in C(D)$ für $i = 1, \ldots, m$

Satz 13.3: (Rechenregeln, Verallgemeinerungen von **Satz 12.12**)

(i) $f, g \in C(D), D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow f \pm g \in C(D) \ni f \cdot g, f/g \in C(D)$, falls $|g| \neq 0$ für $x \in D$

(ii) $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
$(f \circ g) : E \rightarrow \mathbb{R}$ falls $g(E) \subset D$ $\quad f \in C(D) \wedge g \in C(E) \rightarrow f \circ g \in C(E)$
$(g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ falls $f(D) \subset E$ $\quad f \in C(D) \wedge g \in C(E) \rightarrow g \circ f \in C(D)$

Satz 13.4: (Verallgemeinerung von Bolzano–Weierstraß, **Satz 12.14**, **Definition 12.15**)
Falls $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, d.h. abgeschlossen und beschränkt, gilt

(i) Alle Folgen $(x_k) \subset D$ haben eine konvergente Teilfolge $(x_{k_i}) \subset D$ so dass $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = x \in D$ (Folgenkompaktheit)

(ii) Für $f \in C(D)$ existieren Punkte $x_*, x^* \in D$, so dass für alle $x \in D$:

$$f(x_*) = \inf\{f(x) : x \in D\} \leq f(x) \leq \sup\{f(x) : x \in D\} = f(x^*)$$

Man schreibt dann $x_* = \text{argmin}(f(x), x \in D)$, sowie $x^* = \text{argmax}(f(x), x \in D)$.

(iii) $f \in C(D) \iff f$ ist gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : \|x - y\| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung: argmax und argmin sind als Funktionen im Allgemeinen nicht wohldefiniert, da mehrerer Maxima bzw. Minima vorliegen können. In diesem Falle werden argmax und argmin als Mengen wie folgt definiert:

$$\text{arg max}_f(D) := \{x \in D \mid \forall y \in D : f(x) \geq f(y)\} \tag{9}$$

und

$$\text{arg min}_f(D) := \{x \in D \mid \forall y \in D : f(x) \leq f(y)\} \tag{10}$$

und man schreibt analog $x^* \in \text{arg max}_f(D)$ bzw. $x_* \in \text{arg min}_f(D)$

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn es für alle Paare $x, y \in D$ eine Pfadfunktion $p : [0,1] \to D$ gibt, so dass $p \in C[0,1]$ und $p(0) = x$ und $p(1) = y$.

Satz 13.5: Mittelwertsatz
Falls $f \in C(D)$ mit D zusammenhängend, existiert für jedes Paar $x, y \in D$ und jedes

$$c \in [\min(f(x), f(y)), \max(f(x), f(y))]$$

ein $z \in D$ mit $f(z) = c$.

§14 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen

Definition 14.1: Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}^m$ mit o.B.d.A. $m = 1$ und $D \subset \mathbb{R}^d$ heißt **punktweise konvergent** gegen $f : D \to \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D : f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Man schreibt $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Äquivalent dazu:

$$f_n \text{ punktweise konvergent} \iff \forall x \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{11}$$

Definition 14.2: Die Folge $f_n : D \to \mathbb{R}$ heißt gegen $f(x)$ **gleichmäßig konvergent**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Satz 14.3: "Vererbung von Stetigkeit bei glm. Konvergenz"
Falls $(f_n) \subset C(D, \mathbb{R})$ glm. gegen f konvergiert, so ist auch f stetig, d.h. $f \in C(D, \mathbb{R})$.

Bemerkung: Die glm Konvergenz läßt sich für $f_n \subset C(D, \mathbb{R})$ mit kompakten $D \subset \mathbb{R}^d$ wie folgt durch Normnotation darstellen. Die Definition 14.2 ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \text{ für } n \geq n_\varepsilon$$

wobei für beliebiges $g \in C(D, \mathbb{R})$ mit D kompakt

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in D} |g(x)| = \max_{x \in D} |g(x)|$$

Diese Norm hat die in Lemma 13.1 aufgeführten Eigenschaften der Euklidischen Norm. Damit wird $C(D, \mathbb{R})$ zum normierten Raum, in dem man ähnlich argumentieren kann, wie im Euklidischen Raum. Insbesondere gilt:

Satz 14.4: Für kompaktes D konvergiert eine Folge $f_n \subset C(D, \mathbb{R})$ genau dann gleichmäßig gegen ein $f \in C(D, \mathbb{R})$, wenn sie eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ im folgenden Sinne ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall\, n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Bemerkung: Glm. Konvergenz ist hinreichend, aber nicht notwendig für Stetigkeit der Grenzfunktion.

Definition 14.5: Für eine Folge $f_n : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ punktweise oder glm. konvergent, gdw. die Folge der Partialsummen $g_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k : D \to \mathbb{R}$ punktweise bzw. glm. konvergent ist.

Satz 14.6: Majoranten-Kriterium von Weierstraß
Falls $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, folgt glm. Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n = f$ aus der Bedingung

$$\|f_n\|_\infty \equiv \max_{x \in D} |f_n(x)| \leq \varphi_n \text{ mit } \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n < \infty$$

d.h. die Skalarreihe der Schranken φ_n muss absolut konvergieren.

Satz 14.7: Falls $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ einen positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ hat, so ist die Reihe auf allen Intervallen $[-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}] \subset (-\rho, \rho)$ glm. Konvergent und $f(x)$ ist in ganz $(-\rho, \rho)$ stetig.

§15 Exponentialfunktion und Logarithmus

Lemma 15.1: Elementare Eigenschaften des exp:

(0) $x > 0 \to \exp(x) > 1 = \exp(0) > \exp(-x) > 0$

(1) $x < y \iff \exp(x) < \exp(y)$ Monotonie

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$

(3) $\forall n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \exp(-x) x^n = 0$

Bemerkung: $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$ und (2) gilt für alle Exponentialfunktionen.

Definition 15.2: Der Spezielle Wert

$e = \exp(1) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \ldots = 2{,}7182818284590\ldots$ heißt **Eulersche Zahl** und erscheint sehr häufig.

Satz 15.3: Eigenschaften von $\exp(x)$

(0) e ist irrational und transzendent.

(1) $\exp(\frac{m}{n}) = [\exp(1)]^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}}$ für $n, m \in \mathbb{N}$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$

Satz 15.4: Umkehrfunktion f^{-1} für monotones $f \in C[a,b]$
Falls f auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, d.h. $x < y \in [a,b] \to f(x) < f(y)$, dann ex. inverse Funktion $f^{-1} : E \equiv [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Diese Funktion ist auch streng monoton wachsend und stetig. Durch Anwendung auf $-f(x)$ gilt der Satz auch für streng monoton fallende Funktionen. Er gilt ebenfalls für $a = -\infty$ und $b = \infty$.

Definition 15.5: Die nach Verallgemeinerung von **Satz 15.4** existierende Umkehrfunktion von $f(x) = \exp(x) : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus*: $\log(x) = \ln(x) : (0, \infty) \to (-\infty, \infty)$.

Lemma 15.6: Eigenschaften des log

(0) $\log(1) = 0, \log(e) = 1, \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

(1) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \frac{\log(1+\tilde{x})}{\tilde{x}} = 1$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\frac{1}{n}}} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$

Definition 15.7: Allgemeine Potenz und Logarithmen zur Basis $0 < a \in \mathbb{R}$

$$a^x \equiv \exp(x\log(a)) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$
$$\log_a(x) \equiv \frac{\log(x)}{\log(a)} \qquad \text{für } 0 < x \in \mathbb{R}$$

Lemma 15.8: Für $0 < a \in \mathbb{R}$ gilt:

(0) $log_a(a^x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ $\to$ $\log_a(a^x) = Id_{\mathbb{R}}$
$a^{\log_a(x)} = x$ für $0 < x \in \mathbb{R}$ $\to$ $a^{\log_a(x)} = Id_{\mathbb{R}}$

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log(a)$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log_a(x)}{x-1} = \frac{1}{\log(a)}$

(2) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Bemerkung: Ausflug in die komplexen Zahlen:

$$\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}\right)$$
$$\frac{\exp(x+iy)}{\exp(x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-y^2\right)^k}{(2k)!}}_{\equiv\cos(y)} + i\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y\left(-y^2\right)^k}{(2k+1)!}}_{\equiv\sin(y)}$$

Schlussfolgerung: Eulersche Formel $\exp(x+iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$

Lemma 15.9:

(0) $\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) = -\sin(-x) \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix)) = \cos(-x) \in \mathbb{R}$

(1) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\sin(x) \in [-1,1] \ni \cos(x)$

(2) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

5. Differentiation

§16 Definitionen und Grundeigenschaften

Definition 16.1: Eine stetige Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** an der Stelle $x_0 \in (a,b)$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{12}$$

existiert. Dann heißt $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ die **Ableitung** von f an der Stelle x_0. Wenn f differenzierbar an allen Stellen $x_0 \in (a,b)$ ist, dann bezeichnet f' auch die Ableitungsfunktion $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$.

Bemerkung: Alternativ schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ statt f'.

Wichtig:
$c \cdot \exp(x) = c \cdot e^x$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist die einzige Klasse von Funktionen, die mit ihrer Ableitung übereinstimmen.

Definition 16.3: Eine Funktion $f \in C(a,b)$ heißt an $x_0 \in (a,b)$ **links- bzw. rechtsseitig differenzierbar**, falls folgende Grenzwerte existieren:

$$f'_-(x) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ bzw. } f'_+(x) \text{ für } h > 0 \tag{13}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall h \in (-\delta, 0) : \left| \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'_-(x) \right| < \varepsilon \tag{14}$$

Man nennt f'_- und f'_+ dann die links- und rechtsseitige Ableitung und $f(x)$ selbst richtungsdifferenzierbar, an der Stelle x, wenn beide existieren.

Lemma 16.4: Eine Funktion $f \in C(a,b)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar g.d.w die Richtungsableitungen $f'_-; f'_+$ existieren und den gleichen Wert haben.

Satz 16.5: (Ableitung von Summen, Produkten und Quotienten)
Falls $f, g \in C(a,b)$ und an x_0 diffbar sind, so sind auch folgende Kombinationen differenzierbar mit den angegebenen Ableitungswerten:

1. $h = \alpha f(x) + \beta g(x)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \to h'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$
   (Linearität = Additivität und Homogenität)
2. $h(x) = f(x)g(x) \to h'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ (Produktregel)
3. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x_0) \neq 0 \to h'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$ (Quotientenregel)

Satz 16.6: (Kettenregel)
Sei $f \in C(a,b)$ an $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar und g auf der Umgebung $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ von $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ in der Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ von x_0 differenzierbar und es gilt.

$$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)) \tag{15}$$

Definition 16.7: Für $f : D \to \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in D$ ein **lokales Minimum bzw. lokales Maximum**, wenn für ein $\delta > 0$:

$$x \in B_\delta(x_0) := \{x \in D : |x - x_0| < \delta\} \to f(x) \geq f(x_0) \text{ bzw. } f(x) \leq f(x_0) \tag{16}$$

Falls die Aussage für ein beliebiges δ gilt, heißt x_0 auch **globales Maximum bzw. globales Minimum** von f auf D.

Satz 16.8: Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung (betreffend 1. Ableitung).
Sei f auf $[a,b]$ stetig, in (a,b) differenzierbar und an $x = a$ rechts- sowie an $x = b$ linksdiffbar. Dann gilt für jedes lokale Minimum $x_0 \in [a,b]$ entweder:

1. $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$
   oder

2. $a = x_0$ und $f'_+(x_0) \geq 0$
   oder

3. $x_0 = b$ und $f'_-(x_0) \leq 0$

Bemerkung: Obige Aussagen sind notwendige Bedingungen für Optimalität, hinreichend für Minimalität (lokal) von $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ ist, dass $f'_+(a) > 0$ bzw. $f'_-(b) < 0$. Für Maximalität von f an x_0 gilt die selbe Stationaritätsbedingung $f'(x_0) = 0$ bei $x_0 \in (a,b)$ und am Rand müssen jeweils die Ungleichungen invertiert werden. Allgemein werden Optimierungsprobleme (= Extremwertaufgaben) als Minimierungsprobleme formuliert. Keine Einschränkung, da $\max\{f(x) : x \in D\} = -\min\{-f(x) : x \in D\}$.

Satz: (Nachtrag) Hinreichende Bedingung für Maxima
Sei $I = [a,b]$
$f \in C^2(I)$, $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$.

- $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ ist ein lokales Maximum von f
- $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ ist ein lokales Minimum von f

Satz 16.9: (Zwischenwertsatz der Differentiation)
Falls $f \in C(a,b)$ und differenzierbar in (a,b), existiert mindestens ein **Zwischenwert** x

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \text{ bzw. } f(b) - f(a) = f'(x)(b - a) \tag{17}$$

Lemma 16.10: Eine auf (a,b) differenzierbare Funktion f, ist streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend, wenn

$$\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0 \text{ bzw. } \forall x \in (a,b) f'(x) < 0 \tag{18}$$

Sie kann auch schwach monoton sein, wenn diese Ungleichungen schwach erfüllt sind. D.h $\geq$ bzw. $\leq$.

Satz 16.11: (Existienz und Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen)
Falls die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ für alle $x \in (a,b)$ existiert und positiv (größer 0) ist, so besitzt $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ eine Inverse $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Diese ist für alle $y \in (f(a), f(b))$ diffbar und es gilt:

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \tag{19}$$

wobei $y_0 = f(x_0)$ bzw. $x_0 = f^{-1}(y_0)$
Die Aussage gilt entsprechend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$

Lemma 16.12:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(x) = \frac{1}{x}$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^y = y \cdot x^{y-1}$ für $0 < x \in \mathbb{R}$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^x = \log(y) \cdot y^x$ für $0 < y \in \mathbb{R}$

Satz 16.13: Sei f auf $[a,b]$ stetig, auf (a,b) diffbar, dann ist f auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig gdw.

$$L_0 \equiv \sup(|f'(x)| : a < x < b) < \infty \tag{20}$$

Falls L_0 endlich ist, so ist L_0 die kleinste mögliche Konstante auf $[a,b]$.

§17 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Satz 17.1: Satz von Rolle
Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und f differenzierbar auf (a,b). Dann existiert $\xi \in (a.b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz 17.2: Verallgemeinerter Mittelwertsatz (**Satz 16.9**)
Seien $f,g \in C[a,b]$ und differenzierbar in (a,b) und $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Dann existiert ein $z \in (a,b)$ so dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Satz 17.3: Zwischenwertsatz
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a,b]$ mit $f'(a) \neq f'(b)$. Dann nimmt f' jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ (also in $[f'(a), f'(b)]$ bzw. $[f'(b), f'(a)]$) an.

Bemerkung: f' muss hierzu nicht stetig sein!

Satz 17.4: Satz von l'Hopital
Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Außerdem gelte:

- $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$ oder
- $\lim\limits_{x\to b} |g(x)| = \infty$

Falls $\lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann auch $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide sind gleich.

§18 Ableitung höherer Ordnung

Definition: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$, wenn
$\forall 0 \leq i < k$ folgende Grenzwerte existieren:

$$f^{(i+1)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(i)}(x_0+h) - f^{(i)}(x_0)}{h}$$

- $C^k(a,b)$ ist der Raum aller auf (a,b) k-mal differenzierbaren Funktionen wobei $C^0 = C$.
- $C^\infty(a,b) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(a,b)$

Satz 18.1: Leibnizregel
Sei $f,g : I \to \mathbb{R}$ k-mal auf I differenzierbar. Dann ist $f \cdot g$ k-mal auf I differenzierbar und es gilt:

$$(f\cdot g)^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x) \tag{21}$$

Satz 18.2: Taylor-Formel
Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$
$(n+1)$-fach differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\vartheta \in [0,1]$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Korollar: Schlömilch-Restterm
$\forall x \in I, m \in \{1,2,...,n+1\} \exists \vartheta \in [0,1]$ mit

$$f(x) = P_{x_0}(x) + f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0)) \frac{(1-\vartheta)^{n-m+1}(x-x_0)^{n+1}}{n! \cdot m}$$

wobei

$$P_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Definition: Sei $I = [a,b]$, $a < b$ eine Intervall und $f \in C^\infty(I)$ mit $x_0 \in I$.
Dann heißt f um x_0 als **Taylorreihe** entwickelbar, wenn es eine Umgebung $U \subset I$ von x_0 existiert, so dass

$$\forall x \in U : \lim_{n\to\infty} R_n(x_0,x) = 0$$

§19 Differenzierbarkeit von Funktionen und Potenzreihen

Korollar: Aus der Linearität der Ableitung(**Satz 16.5**) folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \tag{22}$$

vorausgesetzt, dass $f_1,\dots,f_n$ in x definiert und differenzierbar sind.

Satz 19.1: Seien $f_n \in C([a,b])$ in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar

(i) $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ sei für alle $x \in [a,b]$ differenzierbar

(ii) $\sum_{n=1}^\infty f_n'(x_0)$ konvergiere

(iii) $\sum_{n=1}^\infty L_n < \infty$, f_n sei Lipschitz-stetig mit Konstante $L_n \forall n \in \mathbb{N}$

Dann ist $f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x_0)$

Lemma 19.2: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k \cdot x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, dann ist f für jedes $x \in (-\rho,\rho)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1} \text{ bzw. } f^{(i)}(x_0) = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{k!}{(k-i)!} \cdot a_k \cdot x^{k-i} \tag{23}$$

Die Reihe zu f' hat ebenfalls Konvergenzradius ρ.

6. Integration

§20 Bestimmtes Integral nach Riemann

Definition 20.1: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ heißt **Integral**, falls für alle geeigneten Funktionen $f,g : [a,b]$ gilt:

1. $\int_a^b \gamma \cdot f(x)\mathrm{d}x = \gamma \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ für $\gamma \in \mathbb{R}$ (Homogenität)

2. $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (Additivität)

3. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ falls $\forall f(x) \leq g(x)$(Monotonie)

4. $\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty$(Beschränktheit)

   wobei hierfür $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} < \infty$ vorausgesetzt wird.

Definition 20.2:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **stückweise konstant**, wenn es eine **Zerlegung** $Z = (x_i)_{i=0}^n$ gibt, so dass

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{24}$$

und es existieren $(c_i)_{i=1}^n$ mit $c_i = f(x)$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

$$f(x_i) \in [\min(c_i, c_{i+1}), \max(c_i, c_{i+1})] \tag{25}$$

Die Menge dieser **Treppenfunktionen** bezeichnen wir mit $\mathscr{T}[a,b]$.

Lemma 20.3:

Falls $f, \tilde{f}$ mit Zerlegungen $Z, \tilde{Z}$ zu $\mathscr{T}[a,b]$ gehören, so gilt dies auch für $\gamma f, f+\tilde{f}$ und $f \cdot \tilde{f}$. Für letztere ist die Zerlegung $Z \cup \tilde{Z}$ geeignet. (Hierbei müssen die Elemente von $Z \cup \tilde{Z}$ neu geordnet werden.)

Definition 20.4:

Für $f \in \mathscr{T}[a,b]$ ist das Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c_i \in \mathbb{R} \tag{26}$$

eindeutig definiert und erfüllt die in **Definition 20.1** geforderten Eigenschaften.

Bemerkung:

Linearität und Beschränktheit implizieren, dass für $f, g \in \mathscr{T}[a,b]$ gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x\right| \leq (b-a)\|f-g\|_\infty \tag{27}$$

M.a.W das Integral als Abbildung des linearen Raumes $\mathscr{T}[a,b]$ in die reellen Zahlen ist Lipschitz-stetig.

Definition 20.5:

Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ der Grenzwert einer Folge von $f_n \in \mathscr{T}[a,b]$ im Sinne von
$\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ist, dann definiert

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \tag{28}$$

eindeutig das Integral.

Satz 20.6:

Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert genau dann eine Folge $f_n \in \mathscr{T}[a,b]$ mit $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, wenn

$$f_+(x) = \lim_{h\searrow 0} f(x+h) \text{ für } x \in [a,b) \tag{29}$$

und

$$f_-(x) = \lim_{h\nearrow 0} f(x+h) \text{ für } x \in (a,b] \tag{30}$$

existieren.

M.a.W., f muss auf ganz $[a,b]$ links- und rechtsstetig sein. (Es kann abzählbar viele Sprünge geben mit $f_+(x) \neq f_-(x)$.)

Definition: Für beliebiges $f \in Re[a,b]$ ist das Integral definiert durch:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \tag{31}$$

Wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{T}[a,b]$ eine beliebige gegen f konvergierende Folge von Funktionen ist, daher gilt

$$\|f - f_n\|_\infty \to 0 \text{ für } n \to \infty \tag{32}$$

Satz 20.7: Das oben definierte Integral für $f \in Re[a,b]$ erfüllt die in **Definition 20.1** verlangten Eigenschaften.

Hierarchie von linearen Funktionenräumen auf $[a,b] \in \mathbb{R}$

$\mathscr{T}[a,b], C[a,b] \subset Re[a,b] \subset B[a,b]$

$B[a,b]$ ist der Raum der Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die beschränkt sind in dem Sinne, dass $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : a \le x \le b\} < \infty$

$Re[a,b]$ ist der Raum der richtungsstetigen (regulated) Funktionen für die
$f_+(x) = \lim_{h\searrow 0} f(x+h)$ für $x \in [a,b)$
$f_-(x) = \lim_{h\nearrow 0} f(x-h)$ für $x \in (a,b]$
existieren.

$C[a,b]$ ist der Raum der stetigen Funktionen für die $f_-(x) = f_+(x)$ für $x \in]a,b[$

Bemerkung: Da sowohl stetige wie auch monoton fallende oder steigende Funktionen überall richtungsstetig, also $\in Re[a,b]$ sind, ist die Existenz des *bestimmten Integrals* für diese wichtigen Funktionenklassen gesichert.

Wie lassen sich Integrale konstruktiv auswerten?

1. Mit Riemann-Summen $\to$ (Numerische Lösung)
2. Durch symbolische Umkehrung der Differentiationsregeln $\to$ Nutze Computer-Algebra-Systeme

Definition 20.8:

Für $f \in B[a,b]$ und eine Zerlegung $Z = (x_i)_{i=0}^n$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ und $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebige Stützstellen, setze

$$R(f,Z,z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(z_i) \tag{33}$$

Die **Feinheit** $\|Z\| = \max\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1 \dots n\} \in \mathbb{R}$ misst die Genauigkeit der Riemannschen Summe.

Satz 20.9:

Für $f \in Re[a,b]$ und eine beliebige Folge von Zerlegungen Z_n mit Stützstellen z_n gilt:

$$\|Z_n\| \to 0 \to R(f, Z_n, z_n) \to \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{34}$$

Bemerkung:

Der Satz beweist, dass Richtungsstetigkeit hinreichend für die Konvergenz der Riemann-Summen gegen einen eindeutigen Grenzwert, nämlich das Integral, ist. Richtungstetigkeit ist jedoch nicht notwendig.

Kette von linearen Teilräumen

$$\mathscr{T}[a,b] \subset Re[a,b] = \overline{\mathscr{T}}[a,b] \subseteq Ri[a,b] \subset B[a,b], \tag{35}$$

wobei $\overline{\mathscr{T}}[a,b]$ den Abschluss über die Treppenfunktionen und $Ri[a,b]$ die Riemann-integrierbaren Funktionen darstellt.

Definition 20.10:

Eine beschränkte Funktion f heißt **Riemann-integrierbar**, wenn die Riemann-Summen $R(f, Z_n, z_n)$ für beliebige Z_n mit $\|Z_n\| \to 0$ gegen einen Grenzwert konvergieren, der dann als **Riemann-integral** bezeichnet wird.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} R(f, Z_n, z_n) \in \mathbb{R} \tag{36}$$

Satz 20.11:

Das Riemannintegral erfüllt auf dem linearen Raum $Ri[a,b]$ der Riemann-integrierbaren Funktionen, die in **Definition 20.1** geforderten Eigenschaften.

Lemma 20.12:

Für $c \in (a,b)$ gilt $f \in Ri[a,b] \iff f \in Ri[a,c] \wedge f \in Ri[c,b]$. In diesem Falle gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \tag{37}$$