Skript zur Analysisvorlesung I

bei Professor A. Griewank

WS 2012/2013

Originalskript von Matthias A. Bendlin (WS 2008/2009). Aktualisiert WS 2012/2013

25. März 2013

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Die reellen Zahlen

1 Die Zahlenbereiche

Die Grundlegende Zahlenbereichshierachie lautet

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

wobei $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots\}$

Motivation für $\mathbb{Z}$: Die Gleichung $a + x = b$ mit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ist nicht immer nach $x \in \mathbb{N}$ auflösbar. Wenn $c + x = d, (c, d) \in \mathbb{N}^2$ eine zweite Gleichung ist, dann ist diese mit der ersten konsistent, wenn $a + d = b + c \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d)$. Die Menge solcher äquivalenter Zahlenpaare kann man formal als ganze Zahlen definieren. Wir deuten das hier nur an.

Skizze:
Somit ergibt sich die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, k, -k, \ldots\}$

Motivation für $\mathbb{Q}$: Nun ist allerdings wiederum die Gleichung $ax = b$ mit $(a, b) \in \mathbb{Z}$ nicht immer in $x \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Skizze:
Somit erhalten wir die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ teilerfremd}\}$

Bemerkung: Das Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt Menge der irrationalen Zahlen, die sich weiter aufteilen in die Menge der irrationalen algebraischen und die Menge der tranzendenten Zahlen.

Algebraische Zahlen sind Nullstellen von Polynomen mit rationalen beziehunsweise ganzen Koeffizienten. Rechenoperationen mit ihnen sind rein algebraisch ausführbar. Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mit tranzendenten Zahlen ist das ureigene Anliegen der Analysis. Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ ist wieder rein algebraisch.

Motivation für $\mathbb{C}$: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

Skizze: Wir konstruieren dazu die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + i\,y : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ mit $\sqrt{-1} =: i$.

2 Die Körperaxiome

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bilden jeweils einen Körper im folgenden Sinne: Es gelten die nachstehenden Axiome für die additive Verknüpfung $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, so daß gilt:

I.1. für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität)

I.2. für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt: $x + y = y + x$ (Kommutativität)

I.3. existiert $0 \in \mathbb{K}$ so daß: für alle $x \in \mathbb{K} : x + 0 = x$ (Nullelement, neutrals Element der Addition)

I.4. für alle $x \in \mathbb{K}$ existiert $y \in \mathbb{K}$ so daß: $x + y = 0, y := -x$ (negatives Element, inverses Element der Addition)

Für die multiplikative Verknüpfung : $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \cdot y =: xy$ des Körpers gelten außerdem folgende Axiome:

II.1. für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ Assoziativität)

II.2. für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt: $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)

II.3. existiert $1 \in \mathbb{K}$ so daß für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt: $x \cdot 1 = x$ (Einselement, neutrales Element der Multiplikation)

II.4. für alle $x \neq 0 \in \mathbb{K}$, existiert $y \in \mathbb{K} : xy = 1$, $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$ (inverses Element der Multiplikation)

Außerdem gilt für die Verknüpfung beider Abbildung folgendes Axiom:

III.1. für alle $x, y, z \in \mathbb{K} : (x + y) \cdot z = xz + yz$ (Distributivgesetz)

Bemerkung: In $\mathbb{Z}$ gelten all diese Axiome mit Ausnahme von II4. Eine solche Struktur heißt auch kommutativer Ring mit 1.

2.1 Satz: Folgen aus den Körperaxiomen

Aus den Körperaxiomen folgt:

i). Die Eindeutigkeit der 0, des neutralen Elementes der Addition, die Eindeutigkeit der 1, dem neutralen Element der Multiplikation.

ii). Daraus folgt wiederum die Eindeutigkeit des Negativen und der Differenz $y - x := y + (-x), (x, y) \in \mathbb{K}^2$, sowie des Kehrwertes und des Quotienten $\frac{y}{x} := yx^{-1}, (x, y) \in \mathbb{K}^2, x \neq 0$.

iii). Somit wiederum ergibt sich die eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungen $a + bx = c$.

Beweis

i). Angenommen 0 und $0'$ sind neutrale Elemente bezüglich der Addition, dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}$ sowohl $0 + x = x$, als auch $0' + x = x$. Setzt man $x = 0'$ in die erste und $x = 0$ in die zweite Gleichung ein, erhält man $0 + 0' = 0' \wedge 0' + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0' = 0'$.
Der Beweis für die Eindeutigkeit des neutralen Elementes der Multiplikation verläuft analog.

iii). Wegen $b \neq 0$ ist $x = \frac{(c \cdot a)}{b}$ wohldefiniert. Einsetzen von x in die Gleichung ergibt:

$$a+b\left[(c-a)b^{-1}\right] = a+[(c-a)b]\,b^{-1} = a+(c-a)(b \cdot b^{-1}) = a+(c-a) = a+c-a = a-a+c = c$$

$\Rightarrow x$ ist tatsächlich Lösung.
Beweis der Eindeutigkeit: Sei $a + b\tilde{x} = c$ für $\tilde{x} \in \mathbb{K}$: $\Rightarrow (a + b\tilde{x}) = (a + bx) \Leftrightarrow b\tilde{x} = bx \Leftrightarrow \tilde{x} = x$

2.2 Satz: Rechenregeln in einem Körper

Rechenregeln für beliebige $x, y \in \mathbb{K}$:

i). $(-(-x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und $((x^{-1})^{-1}) = x$ wenn $x \neq 0$

ii). $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

iii). $(-x)y = -(xy)$

iv). $-(x+y) = -x - y$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ und $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ für $x \neq 0 \neq y$

Zusammenfassung: Alle aus der Schule bekannten Rechenregeln lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten und gelten insbesondere in $\mathbb{R}$ und allen Teilkörpern $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Bemerkung: Die Grundrechenarten sind alle jeweils binäre Operationen, daß heißt, daß sie jeweils zwei Argumente zu einem Körperelement verknüpfen. Demgegenüber sind $-x$ und x^{-1} unäre Operationen, daß heißt, sie werden jeweils auf ein Element angewendet. Das Minuszeichen kann somit sowohl eine unäre, wie auch binäre Operation darstellen. Das unäre Pluszeichen ist trivial und wird meist weggelassen.

2.3 Satz: Induktionsprinzip

Sei $A(n)$ eine Aussage die für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gemacht werden kann, d.h. entweder wahr oder falsch ist. Falls nun

Induktionsanfang IA: $A(n_0)$ wahr ist und

Induktionsvoraussetzung IV: für beliebiges $n \geq n_0$ aus der Wahrheit von $A(m)$ für alle $m < n$

Induktionsschluss IS: folgt dass auch $A(n)$ zutrifft

dann gilt $A(n)$ in der Tat für alle $n \geq n_0$.

Man kann mit Hilfe dieses Induktionsprinzipes viele Aussagen beweisen, die jeweils für unendlich viele, durch n numerierten Fälle gelten. Häufig gilt dabei der Induktionsschluss in starker Form, d.h. $A(n)$ folgt schon unmittelbar aus $A(n-1)$ ohne, dass man dafür die Aussagen $A(m)$ für $m = n_0 \ldots n-2$ hinzuziehen muss. Typisch ist hier das folgende Beispiel.
Beispiel: <u>**Die Bernoulli-Ungleichung.**</u>

Behauptung:

$$(1+h)^n \geq 1 + hn \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } h \in \mathbb{R}, h \geq -1.$$

Beweis:

IA: Ungleichung gilt für $n_0 = 1$ da $1 + h = 1 + h$, für alle $h \in \mathbb{R}$.

IV: Die Aussage sei für alle $1 \leq m < n$ und insbesondere $m = n-1$ richtig.

IS: Dann folgt

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= (1+h)^{n-1}(1+h) \\ &\overset{IV}{\geq} (1+(n-1)h)(1+h) \\ &= 1 + h + (n-1)h + (n-1)h^2 \\ &\geq 1 + n\,h \quad \square\end{aligned}$$

Hier haben wir Eigenschaften der Ungleichungsbeziehung $\leq$ zwischen reeelen Zahlen benutzt, die erst später formalisiert werden.

2.4 Definition: Notation für Tupel, Summen, Produkt

Schlußfolgerung aus den Körperaxiomen: Verallgemeinerung von Assoziativität, Kommutativität, Distributivität auf endliche Summen und Produkte, sowie deren Verknüpfungen. Für ein Tupel von n Zahlen schreibt man $(a_j)_{j=1}^n = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Für wiederholte Addition und Multiplikation schreibt man:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j := (\ldots((a_1 + a_2) + a_3) + \ldots) + a_n = (\sum_{j=1}^{n-1} a_j) + a_n$$
$$\prod_{j=1}^{n} a_j := (\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \ldots) \cdot a_n = (\prod_{j=1}^{n-1} a_j) \cdot a_n$$

Man spricht hier auch von rekursiver oder induktiver Definitionen, wobei man als Induktionsanfang setzt für die leere Summe $\sum\limits_{j=1}^{0} a_j = 0$ und für das leere Produkt $\prod\limits_{j=1}^{0} a_j = 1$. Dies gilt unabhängig davon was der Wert von a_0 ist oder ob a_0 überhaupt definiert ist.

Beispiel: Die Fakultät: $n! = \prod\limits_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = (n-1)! \cdot n \quad$ mit $\quad 0! = 1 = 1!$, das ist wichtig!!

Spezialfall Potenznotation: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x \cdot x}_{n-mal} = \prod\limits_{j=1}^{n} x \Rightarrow x^0 = 1$

Bemerkung: Es lässt sich mit Hilfe der Kommutativität der binären Addition und Multiplikation leicht induktiv überprüfen, dass der Wert einer Summe oder eines Produktes in einem Körper unabhängig von der Reihenfolge der Elemente ist. Dies ist nicht selbstverständlich und gilt zum Beispiel für die Multiplikation im nichtkommuntativen Ring der reellen 2×2 Matrizen nicht.

Beispiel: (nach Gauss)

Für $n \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis:

IA : Gilt für $n = 0$: $\quad \sum_{k=1}^{0} k = 0 = \frac{0 \cdot (1+0)}{2} = 0.$

IV : Die Aussage sei für $0 \leq m < n$ richtig.

IS :

$$n - 1 \to n : \quad \sum_{k=1}^{n} k = \left[\sum_{k=1}^{n-1} k\right] + n$$
$$\stackrel{IV}{=} \frac{(n-1)(n)}{2} + n$$
$$= \frac{n^2 - n}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n)(n+1)}{2} \qquad \square$$

Beispiel: **<u>Geometrische Summe</u>**

Behauptung: Für alle $a, q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} a \cdot q^k = \begin{cases} a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} & \text{falls } q \neq 1 \\ a \cdot n & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Beweis: Für $q = 1$ klar. Sei jetzt $q \neq 1$:

IA : Gilt für $n = 1$: $\quad \sum_{k=0}^{0} a \cdot q^k = a \cdot q^0 = a \cdot 1 = a$

IV : Die Aussage sei für $1 \leq m < n-1$ richtig.

IS :

$$n-2 \to n-1: \quad \sum_{k=0}^{n-1} a \cdot q^k = \sum_{k=0}^{n-2} a \cdot q^k + a \cdot q^{n-1} \overset{IV}{=} a \cdot \frac{q^{n-1}-1}{q-1} + a \cdot q^{n-1}$$
$$= a \cdot \frac{q^{n-1}-1}{q-1} + \frac{a \cdot q^{n-1} \cdot (q-1)}{q-1}$$
$$= \frac{a \cdot q^{n-1} - a}{q-1} + \frac{a \cdot q^n - a \cdot q^{n-1}}{q-1} = \frac{a \cdot q^n - a}{q-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \quad \square$$

2.5 Definition: Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizienten für $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) = \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)$$

und läßt sich auch so definieren für $n \in \mathbb{Z}$ oder sogar $n \in \mathbb{R}$.

2.6 Lemma: Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

i). $\binom{n}{k} \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ii). $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

Beweis

i). gilt per Definition.

ii). Beweis unter Nutzung von i.) mittels Fallunterscheidung:

Fall 1: $n = k : \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n} = 1 + 0$

Fall 2: $n > k$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{(k+n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \square.$$

2.7 Satz: Binomialsatz

Für $x, y \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} \tag{I.1}$$

Beweis

- **IA**: $n = 1$:
$$\Rightarrow (x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1.$$

- **IV**: Es gelte bereits für alle $m < n$.

- **IS**: $n-1 \to n$:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)^{n-1} \cdot (x+y) \overset{IV}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} \cdot x^k y^{n-k-1} \right] (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{n-1} x^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} y^n \\
&= x^k + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \right] + y^n \\
&= \binom{n}{n} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{0} y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ \square
\end{aligned}
$$

2.8 Lemma: Verallgemeinerte Distributivität

Für alle $b \in \mathbb{K}$ und $(a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$ mit $n \geq n_0 = 0$ gilt:

$$
b\,(\sum_{j=1}^{n} a_j) = \sum_{j=1}^{n} (b\,a_j)
$$

Dabei kann das Argument der Summe ein beliebiger Ausdruck sein, der nicht unbedingt vom Laufindex abhängen muss, wie zum Beispiel im Falle:

$$
\sum_{j=1}^{n} b = n\,b
$$

Beweis

Beweis durch Induktion über den Laufindex n. Zu zeigen ist: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Gültigkeit der Beahauptung für alle $m < n$, daß die Aussage auch für n selbst gilt. Fallunterscheidung:

- **IA**: Wenn $n = 0$ ist gilt nach Vereinbarung

$$
0 \ = \ b \cdot \sum_{j=1}^{0} a_j \ = \ \sum_{j=1}^{0} (b \cdot a_j) \ = \ 0
$$

- **IV**: Wenn $n > 0$ können wir verwenden, daß die Aussage bereits für alle $0 \leq m < n$ gilt.
- **IS**: $m = n-1 \to n$:

$$
\begin{aligned}
b \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_j) = b \cdot \left[(\sum_{j=1}^{n-1} a_j) + a_n \right] = b \cdot \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_j \right] + b \cdot a_n \\
\overset{IV}{=} \sum_{j=1}^{n-1} (b \cdot a_j) + (b \cdot a_n) = \sum_{j=1}^{n} (b \cdot a_j) \ \square
\end{aligned}
$$

Für ein zweites Zahlentupel $(b_i)_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m$ folgt somit:

$$\underbrace{(\sum_{i=1}^m b_i)\cdot(\sum_{j=1}^n a_j)}_{1.)} = \underbrace{\sum_{j=1}^n((\sum_{i=1}^m b_i)\cdot a_j)}_{2.)} = \underbrace{\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m(b_i\cdot a_j)}_{3.)} = \underbrace{\sum_{i=1}^m b_i\cdot(\sum_{j=1}^n a_j)}_{4.)}$$

Frage: Wieviele Operationen brauche ich, um diesen Aussdruck in verschiedenen Formen auszuwerten?

	1.)	2.)	3.)	4.)
Additionen :	$(m+n-2)$	$(m-1)+(n-1)$	$mn-1$	$m+n-2$
Multiplikationen :	1	n	mn	m

Fazit: Im Allgemeinen lohnt es sich, gemeinsame Faktoren aus Summen heraus zu ziehen, um die Anzahl der binären Operationen zu reduzieren.

Allgemeine Summen- und Produktnotation:

$$\sum_{j=m}^{n} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n-m+1} a_{m+j-1} & \text{falls } n \geq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \prod_{j=m}^{n} = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n-m+1} a_{m+j-1} & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

3 Anordnung, Absolutbetrag, Minimum und Maximum

Im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ lässt sich $\mathbb{R}$ und jeder Teilkörper von $\mathbb{R}$ linear auf der " Zahlengerade" anordnen.

Anordnungsaxiome in $\mathbb{R}$

Es gilt:

1. Entweder $(x < y)$ oder $(x = y)$ oder $(x > y)$ (Trichotomoie)
2. $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$ (Transitivität)
3. $(x < y) \wedge z \in \mathbb{R} \Rightarrow z + x < z + y$ (Monotonie der Addition)
4. $(x < y) \wedge (0 < z \in \mathbb{R}) \Rightarrow zx < zy$ (Semi-Monotonie der Multiplikation)

Notation und Definition:
$x \leq y \Leftrightarrow (x < y \vee x = y) \Leftrightarrow y \geq x$ und wir definieren als Absolutbetrag von x

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

3.1 Lemma: Eigenschaften des Betrages

i). $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

ii). $|xy| = |x||y|$ (Homogenität)

iii). $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

iv). $|x - y| \geq ||x| - |y||$ (inverse Dreiecksungleichung)

Bemerkung: Das Lemma gilt auch für die Verallgemeinerung des Betrages $|x|$ von Zahlen $x \in \mathbb{R}$ auf Normen $||x|| \in \mathbb{R}$ von Vektoren x in endlich oder unendlich dimensionalen Räumen, wie zum Beispiel im $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm, woher die Dreiecksungleichung ihren Namen hat.

Beweis der Eigenschaften

i). Nach Definition.

ii). Beweis durch Fallunterscheidung:

- Falls $x \geq 0 \leq y \ \rightarrow\ 0 \leq x \cdot y \rightarrow |x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$
- Falls $x < 0 > y \ \rightarrow\ 0 < x \cdot y \rightarrow |x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$
- Falls $x < 0 < y \ \rightarrow\ 0 > x \cdot y \ \rightarrow\ |x \cdot y| = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$

iii). Beweis durch Fallunterscheidung:

- $x \geq 0$ und $y \geq 0$: $\Rightarrow 0 \leq x + y = |x + y| = |x| + |y|$
- $x \leq 0$ und $y \geq 0$:
  Falls $x \leq -y \Rightarrow x + y \leq 0 \Rightarrow |x + y| = -(x + y) = -x - y$
  und $-x \leq |x|,\ -y \leq |y| \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$
  Falls $x > -y \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow |x+y| = x+y$ und $x \leq |x|, y \leq |y| \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$
- $x \geq 0$ und $y \leq 0$: Behauptung folgt aus Symmetrie.
- $x \leq 0$ und $y \leq 0$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 \geq x + y = -|x + y| = -(-x) + (-(-y)) = -|x| - |y| \\
&\Rightarrow |x + y| = |x| + |y|
\end{aligned}$$

iv). Folgt aus iii) gemäß:

$$\begin{aligned}
|x| &= |y + x - y| \leq |y| + |x - y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \\
|y| &= |x + y - x| \leq |x| + |y - x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x| \\
&\Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|
\end{aligned}$$

3.2 Definition: max und min

$$\max(x, y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \min(x, y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

Folgerung: Auf der Menge der reellen Zahlen erfüllen die binären Operationen $\min(x, y)$ und $\max(x, y)$ die folgenden Eigenschaften:

i). Kommutativität: $\min(x, y) = \min(y, x)$ sowie $\max(x, y) = \max(y, x)$

ii). Assoziativität: $\min(x, \min(y, z)) = \min(\min(x, y), z)$ sowie $\max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z)$

iii). Distributivität: $\max(\min(x, y), z) = \min(\max(x, z), \max(y, z))$
sowie $\min(\max(x, y), z) = \max(\min(x, z), \min(y, z))$

Beweis

Durch etwas mühsame aber elementare Fallunterscheidungen.

Bemerkung: Es gibt in $\mathbb{R}$ kein neutrales Element bezüglich min und max:

$$\min(x, u) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u = \infty \notin \mathbb{R}$$

Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ um $\pm\infty$ verletzt aber die Körperaxiome, weswegen $\pm\infty$ nicht als echte reelle Zahlen betrachtet werden. Trotzdem tauchen sie hin und wieder in Gleichungen auf, insbesondere wenn Grenzwerte betrachtet werden.

Verallgemeinerung: Genauso wie Summe, Produkt und andere sowohl kommutative wie assoziative Operationen, lässt sich auch min und max auf endliche Argumenttupel $(a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ übertragen:

$$\max((a_j)_{j=1}^n) := \max(\max((a_j)_{j=1}^{n-1}, a_n) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Für min gilt diese Erweiterung ebenso. Wenn $n = 0$ also über null Komponenten optimiert wird setzt man

$$\max((a_j)_{j=1}^0) = -\infty = \max(\emptyset) \quad \text{und} \quad \max((a_j)_{j=1}^0) = +\infty = \min(\emptyset)$$

Damit bleibt die obige induktive Beziehung auch für $n = 1$ gültig.
Frage: Kann man auch max und min von unendlich langen Tupeln (Folgen) oder unendlichen Mengen reeller Zahlen bilden?
Antwort: In gewissem Sinne ja, vorausgesetzt, die Vollständigkeit des geordneten Zahlenkörpers ist sichergestellt.

4 Vollständigkeit der reellen Zahlen

4.1 Definition: Beschränktheit und Schranken

In einem Körper $\mathbb{K}$, der die Anordnungsaxiome 1-4 erfüllt, definieren wir für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$:

i). $s \in \mathbb{K}$ als obere Schranke von M falls für alle $a \in M : a \leq s$

ii). M heißt nach oben beschränkt falls ein solches $s \in \mathbb{K}$ existiert.

In derselben Weise definieren wir auch eine untere Schranke von M und nennen dann M nach unten durch jenes $s \in \mathbb{K}$ beschränkt.
Falls M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist heißt M beschränkt, ansonsten unbeschränkt.

4.2 Definition: Supremum und Infimum

Eine obere Schranke $s \in \mathbb{K}$ heißt *Kleinste obere Schranke oder Supremum* von M falls :

$$\text{für alle } s' \in \mathbb{K},\ s' \text{ obere Schranke , gilt: } s \leq s'$$

Es gibt höchstens ein solches Supremum und man schreibt: $s = \sup(M)$.
Gilt für $s \in \mathbb{K} : s \in M$, so heißt es auch Maximum von M und man schreibt:

$$s = \sup(M) = \max(M)$$

.
Auf gleicher Weise definieren wir das Infimum und das Minimum. Es gilt für jede beliebige Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$

$$\inf(M) \leq a \leq \sup(M) \text{ für alle } a \in M$$

Man setzt analog zu min und max

$$-\infty = \sup(\emptyset) \quad \text{und} \quad +\infty = \inf(\emptyset)$$

so dass $M = \emptyset$ der einzige Fall ist indem nicht gilt $\inf(M) \leq \sup(M)$.

Beispiele

1.): Jede endliche Menge M läßt sich durchnummerieren, so dass $M = \{a_j\}_{j=1}^n$ und $\inf(M) = \min(M) = \min(\{a_j\}_{j=1}^n) \leq \sup(M) = \max(M) = (\{a_j\}_{j=1}^n)$

2.): $M = \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ hat $\inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N}) = 1$. $\mathbb{N}$ ist aber nach oben unbeschränkt, da nach dem Archimedischen Gesetz gilt: für alle $x \in \mathbb{Q}$ existiert $n \in :n > x$.
Mit anderen Worten: $\mathbb{N}$ hat keine obere Schranke $x \in \mathbb{Q}$. Diese Aussage folgt später aus Axiom V, dem Supremumsprinzip.

3.): $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ hat das $\sup(M) = \max(M) = 1$ und $\inf(M) = 0 \neq \min(M)$, da nach Archimedes: $\mathbb{Q} \ni s \leq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ existiert $\frac{p}{q} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (p = 0 \vee n \leq \frac{q}{p}$ für alle $n \in \mathbb{N}) \Rightarrow s = 0$ ist tatsächlich größte untere Schranke.

4.): $M \equiv \{0 \leq x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ hat $\inf(M) = 0 = \min(M)$ und ist nach oben beschränkt. Mit Hilfe von Archimedes und der Binomialformel kann man zeigen (siehe Vorlesung), dass M kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat.

4.3 Axiom V: Vollständigkeit

Eine ganz wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen ist das folgende Axiom:

Jede nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum $\sup(M)$.

Bemerkung: Da für M nach unten beschränkt gilt $\inf(M) = -\sup(-M)$ folgt ganz analog, dass jede nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum $\inf(M) \in \mathbb{R}$ besitzt. Deswegen muss nur die Existenz einer der beiden für entsprechend beschränktes M angenommen werden.

Folgerung: Axiom V impliziert, daß für alle $0 < x \in \mathbb{R}:$ existiert $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x < n$.

Beweis: Annahme, die rechte Ungleichung gilt nicht $\Rightarrow x \geq n$, für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ ist durch x nach oben beschränkt und muss nach Axiom V ein Supremum s haben $\Rightarrow s - 1$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, so daß $s-1 < n$ für ein $n \in \mathbb{N} \Rightarrow s < n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow s$ ist auch keine obere Schranke im Widerspruch zur Annahme.
Beweis für $\frac{1}{n}$ analog.

4.4 Satz: Existenz, Eindeutigkeit und Monotonie der Wurzelfunktion

Für $0 < c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $0 < x \in \mathbb{R}$, so daß $x^n = c$. Dieses x wird mit $\sqrt[n]{c}$ bezeichnet und ist monoton bezüglich c, daß heißt $c \leq c' \Rightarrow \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{c'}$.

Beweis

Zunächst gilt für $0 < x, y \in \mathbb{R}:$

$$(x^n - y^n) = (x - y) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j} = (x-y)(y^{n-1} + xy^{n-2} + \ldots + x^{n-1})$$

so dass

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leq y^n$$

das heißt die Potenz x^n ist für $x > 0$ eine streng monotone Funktion. Außerdem gilt:
$M := \{0 \leq y \in \mathbb{R} : y^n \leq c\} \neq \emptyset$, da $0 \in M$ und die Menge ist durch $1 + c$ nach oben beschränkt, da

$$(1+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot c^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} 1^k \cdot c^{n-k} + n \cdot c + 1 \geq c + 1 > c$$

Setze $x := \sup(M) \leq 1 + c$, welches nach Axiom V existiert.
Es gilt $x > 0$ weil für eine natürliche Zahl $n_0 > \max\{\frac{1}{c}, 2\}$ folgt dass $\frac{1}{n_0} < c$, $\frac{1}{n_0} < 1$ und somit

$0 < (\frac{1}{n_0})^n < \frac{1}{n_0} < c$. Deshalb ist $x > \frac{1}{n_0} > 0$.
Nun bleibt zu zeigen, daß $x^n = c$ durch Ausschluß der Möglichkeiten $x^n < c$ und $x^n > c$.

Fall 1: $x^n > c$
Betrachte $(x - \frac{1}{m})$, $m \in \mathbb{N}, m > \frac{1}{x}$ und zeige, daß es für hinreichend großes m auch eine obere Schranke wäre:

$$(x - \frac{1}{m})^n = x^n(1 - \underbrace{\frac{1}{mx}}_{\leq 1 \text{ für } m > \frac{1}{x}})^n \underset{Bernoulli}{\geq} x^n(1 - \frac{n}{mx}) = (\frac{x^n}{c})(1 - \frac{n}{mx}) \cdot c > c \tag{I.2}$$
$$\Leftrightarrow (\frac{x^n}{c})(1 - \frac{n}{mx}) > 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{mx} > \frac{c}{x^n} \Leftrightarrow \frac{n}{mx} < 1 - \frac{c}{x^n} \Leftrightarrow m > \frac{n}{x(1-\frac{c}{x^n})}$$

Die letzte Bedingung wäre für hinreichend großes m erfüllbar. Das führt zum Widerspruch zur Supremumeigenschaft von x, so daß $x^n \leq c$ sein muss.

Fall 2: $x^n < c$
Betrachte $(x + \frac{1}{m})$ und zeigen daß es für hinreichend großes m auch noch zu M gehört, im Widerspruch zur Supremumeigenschaft.

$$\begin{aligned}(x + \frac{1}{m})^n &= x^n(1 + \frac{1}{mx})^n = x^n \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(\frac{1}{mx})^j \leq x^n \cdot \sum_{j=0}^{n}(\frac{n}{mx})^j \\ &= x^n \cdot \frac{(\frac{n}{mx})^n - 1}{\underbrace{\frac{n}{mx}}_{<1 \text{ für } m > \frac{n}{x}} - 1} = x^n \cdot \frac{1 - (\frac{n}{mx})^{n+1}}{1 - \frac{n}{mx}} \leq \frac{x^n \cdot c}{c \cdot (1 - \frac{n}{mx})} < c \\ &\Leftrightarrow \frac{x^n}{c \cdot (1 - \frac{n}{mx})} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^n}{c} < 1 - \frac{n}{mx}\end{aligned} \tag{I.3}$$

Die letzte Ungleichung ist genau dann erfüllbar durch großes m, falls $\frac{x^n}{c} < 1$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Supremumeigenschaft von x.

Die Monotonie folgt aus $x' = \sup(M') \geq \sup(M) = x$ für $M \subset M' := \{0 \leq y : y^n \leq c'\}$. Daraus ergibt sich auch die Eindeutigkeit.
Bemerkung: Obiger Existenzbeweis für $\sqrt[n]{c}$ ist nicht konstruktiv, das heißt, er gibt kein Verfahren an, mit dem diese reelle Zahl x berechnet oder auch nur beliebig genau durch $\tilde{x} \in \mathbb{Q}$ angenähert werden kann.

Kapitel II

Folgen und Reihen

1 Folgen und Konvergenz

1.1 Definition: Folge

Abstrakt ist eine reelle Folge eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, wobei man üblicherweise direkt die Bilder $x_n = f(n) \in \mathbb{R}$ angibt und die Gesamtfolge hinschreibt als:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n)_{n\geq 1} \quad \text{oder} \quad (x_n)$$

Häufig wird (x_n) auch rekursiv definiert, daß heißt es gibt eine Funktion $g(x, n) = \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so daß $x_{n+1} = g(x_n, n)$ mit x_0 oder x_1 gegeben.

Beispiel

$x_n \ = \ \frac{1}{n!} \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} \ = \ \frac{x_n}{n+1} \quad \text{mit} \quad x_1 = 1! = 1$

Bemerkung: Zwei Folgen (x_n) und $(\tilde{x}_n)$ gelten als äquivalent, falls für ein festes m und alle n gilt: $\tilde{x}_n = x_{n+m}$. Mit anderen Worten ein jeweils endliches Anfangssegment ist von geringem Interesse, man untersucht bei Folgen die Eigenschaften des unendlichen Rest an Folgengliedern.

1.2 Definition: Konvergenz einer Folge

Eine Folge (x_n) heißt gegen den Grenzwert x_* konvergent, falls:

$$\text{für alle } \ \epsilon\ > 0 \text{ existiert ein } n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so dass} \quad |x_n - x_*| < \epsilon \quad \text{für alle } \ n \geq n_0$$

Man schreibt dann auch $x_* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ oder $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_*$.
Man bezeichnet manchmal $n_0(\epsilon)$ statt n_0, um die Abhngigkeit von ϵ deutlicher zu machen.
Falls x_* existiert, heißt die Folge konvergent, sonst divergent.

Bemerkung: Die obige Definition ist eindeutig, da (x_n) höchstens einen Grenzwert haben kann.
Beweis: Annahme, (x_n) hat die Grenzwerte $\tilde{x}_* \neq x_*$. Dann existieren für $\epsilon = \frac{|x_* - \tilde{x}_*|}{3}$ Zahlen $n_0(\epsilon)$ und $\tilde{n}_0(\epsilon)$, so daß gilt:

$$|x_n - x_*| < \epsilon \text{ für } n \geq n_0$$
$$|x_n - \tilde{x}_*| < \epsilon \text{ für } n \geq \tilde{n}_0$$

Daraus folgt für $n \geq \max(n_0, \tilde{n}_0)$:

$$\begin{aligned} |x_* - \tilde{x}_*| &= |x_* - x_n + x_n - \tilde{x}_*| \leq |x_* - x_n| + |x_n - \tilde{x}_*| \leq \epsilon + \epsilon \\ &= \tfrac{2}{3}|x_* - \tilde{x}_*| < |x_* - \tilde{x}_*| \end{aligned}$$

Also führt die Annahme, dass $|x_* - \tilde{x}_*| \neq 0$, zu einem Widerspruch!

1.3 Lemma: Beschränktheit konvergenter Folgen

Jede konvergente Folge ist beschränkt in dem Sinne, dass die Menge $f(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschrfänkt ist.

Beweis

Wegen der Konvergenz existiert für $\epsilon = 1$ ein n_0, so dass $|x_n - x_*| \leq 1 \Rightarrow x_n \leq x_* + 1$ für $n \geq n_0$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $x_n \leq \max(x_1, \ldots, x_{n_0-1}, x_* + 1)$ und entsprechend $x_n \geq \min(x_1, \ldots, x_{n_0-1}, x_* - 1)$ $\square$

Beispiele

Sei $0 < c \in \mathbb{R}$:

- konstante Folge: $x_n = c, \lim\limits_{n\to\infty} = c$
- lineare Folge : $x_n = c \cdot n$, die Folge ist unbeschränkt und kein Grenzwert kann existierten.
- reziproke Folge : $x_n = \frac{1}{n^c} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
  Begründung: $|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n^c} < \epsilon$ für große $n \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt[c]{\epsilon}} \Rightarrow n_0(\epsilon) = \sqrt[c]{\frac{1}{\epsilon}} = \lceil x \rceil$ mit $\lceil x \rceil$ kleinste obere Schranke aus $\mathbb{N}$ für $x \in \mathbb{R}$.

1.4 Definition: Monotonie

Eine Folge heißt monoton steigend beziehungsweise fallend wenn gilt:

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \text{bzw} \quad x_n \geq x_{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wenn sogar $<$ beziehungsweise $>$ gilt, heißt die Folge streng monoton steigend oder fallend.

1.5 Satz: Konvergenz monotoner, beschränkter Folgen

Jede monoton steigende nach oben beschränkte Folge und jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert und zwar gegen $x_* = \sup(x_n : n \in \mathbb{N})$ bzw $x_* = \inf(x_n : n \in \mathbb{N})$.

Beweis

Für beliebiges $\epsilon > 0$ kann $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} - \epsilon = x_* - \epsilon$ keine obere Schranke von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sein. Also existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon)$) $\in \mathbb{N}$, sodass $x_{n_0} \geq x_* - \epsilon \leq x_* \Rightarrow |x_n - x_*| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Entsprechendes gilt für inf bei monoton fallenden Folgen $\square$

2 Grenzwertsätze

2.1 Satz: Grenzwertsätze

Falls (x_n) und (y_n) gegen x_* und y_* konvergieren, gilt:

i). $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_* \pm y_*$ (Additivität)

ii). $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_* y_*$ und insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} c x_n = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c x_*$ (Homogenität)

iii). $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{x_*}{y_*}$, vorausgesetzt $y_* \neq 0$

Eigenschaft i.) und ii.) ergeben zusammen die Linearität des Grenzwertes.
Bemerkung: Das Hinschreiben von $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$ impliziert bereits die Existenz dieses Ausdruckes.

Beweis

Seien $n_x(\epsilon)$ und $n_y(\epsilon)$ Funktionen, sodass
$|x_n - x_*| < \epsilon$ für $n \geq n_x(\epsilon)$ und $|y_n - y_*| < \epsilon$ für $n \geq n_y(\epsilon)$

i). Dann folgt für beliebiges $\epsilon > 0$ und $n \geq n(\epsilon) = \max(n_x(\frac{\epsilon}{2}), n_y(\frac{\epsilon}{2}))$, dass

$$\begin{aligned} &|x_n - x_*| < \tfrac{\epsilon}{2} \wedge |y_n - y_*| < \tfrac{\epsilon}{2} \\ &\overset{\triangle-Ungl.}{\Rightarrow} |x_n + y_n - x_* - y_*| = |x_n - x_* + y_n - y_*| \\ &\leq |x_n - x_*| + |y_n - y_*| < 2\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_* \pm y_*$ ist tatsächlich Grenzwert von $x_n \pm y_n$.

ii). Da (y_n) konvergiert, hat es eine obere Schranke $s > 0$. Dann folgt:

$$|x_n y_n - x_* y_*| = |(x_n - x_*)y_n + x_*(y_n - y_*)| \leq |x_n - x_*||y_n| + |x_*||y_n - y_*|$$

dann folgt für $x_* \neq 0$ und $n \geq n(\epsilon) = \max\left(n_x(\frac{\epsilon}{2s}), n_y(\frac{\epsilon}{2|x_*|})\right)$, oder $x_* = 0$ und $n \geq n_x(\frac{\epsilon}{s})$

$$|x_n - x_*||y_n| + |x_*||y_n - y_*| \leq |x_n - x_*|s + |x_*||y_n - y_*| < \epsilon$$

iii). Betrachte zunächst nur den Spezialfall $(x_n) = 1$ und $y_* > 0$.
Dann gilt für $n \geq \max(n_y(\frac{y_*}{2}), n_y(\epsilon \cdot \frac{y_*^2}{2}))$: $|y_n - y_*| \leq \frac{y_*}{2} \Rightarrow y_n \geq \frac{y_*}{2}$
$\Rightarrow |\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_*}| = |\frac{y_* - y_n}{y_*|y_n|}| \leq \frac{|y_* - y_n|}{y_* \cdot \frac{y_*}{2}} < \epsilon$
iii) für allgemein (x_n) folgt aus ii), da $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot \frac{1}{y_n})$ $\square$.

Beispiele:

i). $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \underbrace{(-x_n)}_{y_n}) = 0$, selbst wenn $x_n = n^3 2$ und somit selbst keinen Grenzwert hat.

ii). $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^c} y_n) = 0$ falls (y_n) beschränkt und $c > 0$.

2.2 Satz: Monotonie des Grenzwertes

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_*$ und (z_n) beliebig, so folgt aus $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n = y_*,$$

und aus $x_* = y_*$ impliziert

$$x_* = y_* = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Beweis

Angenommen $y_* < x_*$, so gilt für $\epsilon = \frac{(x_* - y_*)}{3} = \frac{|y_* - x_*|}{3}$ und $n \geq \max(n_x(\epsilon), n_y(\epsilon))$ mit n_x und n_y so dass $|x_n - x_*| < \epsilon$ für alle $n \geq n_x(\epsilon)$, $|y_n - x_*| < \epsilon$ für alle $n \geq n_y(\epsilon)$, dann:

$$\begin{aligned} &|x_n - x_*| < \epsilon \Rightarrow x_n > x_* - \epsilon, |y_n - y_*| < \epsilon \Rightarrow y_n < y_* + \epsilon \Rightarrow 0 \leq y_n - x_n < y_* + \epsilon - x_* + \epsilon \\ &= -(x_* - y_*) + (x_* - y_*)\tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{3}(x_* - y_*) < 0 \text{ Widerspruch} \end{aligned}$$

Restlichen Beweis als Übung.

2.3 Lemma: Elementare aber wesentliche Grenzwerte

i). $x_* > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_*} = 1$

ii). $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Beweis

i). Für $x_* = 1$ ist klar. Sei $x_* > 1$. Betrachte $0 \leq x_n := \sqrt[n]{x_*} - 1$. Dann $(x_n+1)^n = x_*$. Nach Bernoulli folgt $x_* = (x_n+1)^n \geq 1 + nx_n \Rightarrow x_n \leq \frac{x_*-1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_*} = 1$. Sei $x_* < 1 \Rightarrow \frac{1}{x_*} > 1$. Es gilt $\sqrt[n]{x_*} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x_*}}}$. Aus obiger Teil folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_*} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x_*}}} = \frac{1}{1}$.

ii). Sei $0 \leq x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow n = (x_n+1)^n = (\sqrt[n]{n})^n$. Nach binomischen Satz gilt: $n = (x_n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2. \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \leq n - 1 \Rightarrow \frac{n}{2} x_n^2 \leq 1 \Rightarrow x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$. $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

2.4 Korollar:

Für beliebige Polynome $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{P(n)}{Q(n)}} = 1$$

Beweis

Siehe Übung.

2.5 Lemma: Folgeneigenschaft vom Supremum/Infimum

Für $M \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$s = \sup(M) \qquad \Leftrightarrow \qquad s \geq x \text{ für alle } x \in M \wedge \text{ existiert } (x_n) \subset M : \lim_{n\to\infty} x_n = s$$

Entsprechend für $\inf(M)$.

Beweis

"$\Rightarrow$"s aber nicht $s - \frac{1}{n}$ ist obere Schranke. Es gibt also jeweils ein mit x_n bezeichnetes Element, so dass $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| \leq \frac{1}{n} = \epsilon$. Also bilden die so konstruierten x_n eine gegen s konvergierende Folge aus M.

"$\Leftarrow$"s obere Schranke. Annahme: $s' = s - \epsilon$ wäre auch obere Schranke. Dann existiert ein $n = n(\epsilon)$, so dass $|s - x_n| < \epsilon$ für $n \geq n(\epsilon) \Rightarrow x_n > s - \epsilon = s'$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Supremumeigenschaft von s'

2.6 Definition: Nullfolgen und uneigentliche Grenzwert

i). $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt Nullfolge, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

ii). $(x_n) \subset \mathbb{R}$ divergiert gegen ∞, in Zeichen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, wenn
für alle $\epsilon > 0$ existiert $n(\epsilon)$ so dass $x_n > \frac{1}{\epsilon}$ für alle $n \geq n(\epsilon)$

iii). $(x_n) \subset \mathbb{R}$ divergiert gegen $-\infty$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} (-x_n) = \infty$

Bemerkung: Im Falle ii.) und iii.) nennt man $\pm\infty$ auch uneigentlichen Grenzwert und sagt häufig, (x_n) *konvergiert uneigentlich* oder *divergiert bestimmt* gegen $\pm\infty$.

2.7 Lemma: Grenzwert des Kehrwertes bestimmt divergenter Folgen

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$
Mit anderen Worten: Der Kehrwert bestimmt divergenter Folgen ist eine Nullfolge.

Beweis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \Rightarrow \text{ für alle } \epsilon \text{ existiert } n(\epsilon) : |x_n| > \tfrac{1}{\epsilon} \text{ für alle } n \geq n(\epsilon) \tag{II.1}$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{|x_n|} = |\tfrac{1}{|x_n|} - 0| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n(\epsilon) \tag{II.2}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{|x_n|} \text{ ist Nullfolge } \square \tag{II.3}$$

Bemerkung: Die Umkehrung von 7.5 ist nicht wahr.

Beobachtung: Die Grenzwertstze sind auf uneigentliche Grenzwerte bedingt erweiterbar, dass heißt für $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm z_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot z_n) = \text{sign}(c) \cdot \infty$ falls $c \neq 0$

Keine Aussage kann jedoch in folgenden Fällen gemacht werden:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot z_n)$ falls $c = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x_n}{y_n})$

3 Teilfolgen, Bolzano-Weierstrass und Cauchy

Vorbemerkung: Für reelle Folgen gilt immer: Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie die Beispiele $x_n = \sin(n)$ und $x_n = (-1)^n$ zeigen.
In beiden Fällen existieren jedoch Teilfolgen, die konvergieren. Dies gilt für alle beschränkten Folgen nach dem unten noch zu beweisenden Satz von Bolzano-Weierstrass.

Warnung: Dies gilt jedoch nicht in unendlichdimensionalen Räumen wie der Menge der univariaten Polynome oder der Menge stetiger Funktionen auf endlichen Intervallen!

3.1 Definition:

Wir definieren $(\tilde{x}_n) \subset \mathbb{R}$ als **Teilfolge** von $x_n \subset \mathbb{R}$, falls es eine streng monoton steigende Indexfunktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, mit $\tilde{x}_n = x_{h(n)}$.
s heißt **Häufungspunkt**, falls $s = \lim_{n\to\infty}(\tilde{x}_n)$ für eine Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ von ursprünglicher (x_n).

Bemerkung: Sehr häufig wird die Indexfunktion nicht explizit angegeben, sondern mittels eines beliebigen Kriterium von den Gliedern von x_n ausgewählt, zum Beispiel: $\tilde{x}_n =$ (alle positiven $\sin(n)$).
Dann ist nicht immer a priori klar, dass die Teilfolge tatsächlich unendlich viele Glieder enthält, wie eigentlich für Teilfolgen verlangt. Dies muss dann gegebenenfalls verifiziert werden.

3.2 Lemma: Konvergenz der Teilfolgen einer konvergenten Folge

i). Jede Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ einer gegen x_* konvergenten Folge (x_n) hat genau denselben Grenzwert $\lim(\tilde{x}_n) = x_*$.

ii). Jede Folge hat mindestens eine monotone Teilfolge, die steigend oder fallend sein kann.

Beweis

i). Per Induktion lässt sich leicht zeigen, dass $h(n) \geq n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $h(n)$ die Indexfunktion von $(\tilde{x}_n)$. Aus der Konvergenz von (x_n) folgt:
$\text{für alle } \ \epsilon > 0 \ \text{ existiert } \ n(\epsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - x_*| < \epsilon \ \text{ für alle } \ n \geq n(\epsilon)$
$\Rightarrow |x_{h(n)} - x_*| < \epsilon$ da $h(n) \geq n \geq n(\epsilon)$
Also konvergieren auch die Teilfolgen gegen x_*.

ii). Bezeichne alle Elemente x_n, für die gilt: $n' > n \Rightarrow x_{n'} \leq x_n$ als Spitzen der Folge (x_n). Diese bilden dann eine monoton fallende Teilfolge, die allerdings nicht notwendigerweise unendlich viele Elemente hat oder under Umstnden sogar leer ist. Wenn nur endlich viele Spitzen vorhanden sind, bleibt zu zeigen, dass es dann eine monoton steigende Teilfolge gibt (siehe Übung).

3.3 Satz: Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge und damit mindestens einen Häufungspunkt.
Mit anderen Worten: Aus jeder beschränkten nicht endlichen Menge lässt sich eine konvergente Teilfolge $(x_n) \subset M$ bilden.

Beweis

Nach Lemma **??** existieren monotone Teilfolgen, die sicherlich auch beschränkt sind und deshalb einen Grenzwert x_* besitzen. Dieser ist laut Definition ein Häufungspunkt □

Beispiele

1). $(x_n) = ((-1)^n)_n$ hat die konstanten Teilfolgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Grenzwerten 1 und -1, welche die Häufungspunkte von (x_n) sind.

2). $x_n = \sin(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ hat jede beliebigen Wert $s \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ als Häufungspunkt.

Bemerkung: Letzteres ist erstaunlich, da die per Definition abzählbare Menge von Folgengliedern (x_n) eine, wie wir sehen werden, überabzählbare Menge von Häufungspunkten erzeugt. Das verlangt, dass es überabzählbar viele Teilfolgen gibt, die jeweils höchstens einen Grenzwert haben können. Dies ist in der Tat der Fall und folgt aus dem Diagonalisierungsargument: Jede Teilfolge der festen Grundfolge (x_n) lässt sich eindeutig charakterisieren durch eine Folge (m_n) mit $m \in \{0, 1\}$ wobei das n-te Element m_n genau dann 1 ist, wenn x_n zur Teilfolge gehört. Angenommen die Menge aller binären Folgen lieŝe sich durchnummerieren und entsprechend untereinander auflisten. Dann könnten wir durch die Modifikation aller diagonalen Elemente, dass heißt Austauschen von 0 und 1, eine neue Folge konstruieren, die noch nicht in der Liste enthalten ist. Dies führt zum Widerspruch der angenommenen Abzählbarkeit der Anzahl der Teilfolgen.

Rückblick: Nach Bolzano-Weierstrass hat jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge und somit einen Häufungspunkt.

3.4 Satz: Direkte Charakterisierung von Häufungspunkten

$x_* \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt einer Folge (x_n)
$\Leftrightarrow \ \text{ für alle } \ (\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}) \ \text{ existiert } \ m > n$ mit $|x_m - x_*| < \epsilon$.
$\tilde{x} \in \mathbb{R}$ ist kein Häufungspunkt von (x_n)
$\Leftrightarrow \ es \text{ existiert } \ (\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}) \text{so dass } \ \text{für alle } \ m > n$ gilt: $|x_m - \tilde{x}| \geq \epsilon$

Beweis

"$\Rightarrow$": Nach Definition existiert eine Teilfolge $(x_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen x_* konvergiert. Also existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein h(n), dass beliebig groß gewählt werden kann, so dass für $n < h(n) = m$ gilt: $|x_m - x_*| = |x_{h(n)} - x_*| < \epsilon$.
"$\Leftarrow$": Setze $\epsilon = \frac{1}{n}$ und finde $m(n) \geq n$, so dass $|x_m - x_*| < \epsilon$. Diese $x_{m(n)}$ bilden eine unendliche Teilfolge, die gegen x_* konvergiert. Also ist a tatsächlich ein Häufungspunkt.
Damit ist die erste Aussage bewiesen und die zweite folgt durch logische Negation.

3.5 Satz: Limes superior und Limes inferior

Für eine nach oben beschränkte Folge (x_n) bezeichne mit $H \subset \mathbb{R}$ die Menge aller Häufungspunkte. Dann hat H ein Supremum, welches tatsächlich als Maximum angenommen wird und mit Limes superior bezeichnet wird.

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup(H) = \max(H)$$

Entsprechend gilt fur eine nach unten beschränkte Folge (y_n):

$$\lim_{n\to\infty} \inf y_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \inf(H) = \min(H)$$

Beweis

In der Übung zu zeigen: Mit (x_n) ist auch $H \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so dass $s = \sup(H)$ wirklich existiert. Nach der Folgencharakterisierung von $\sup(H)$, existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H mit $y_n \to s$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|y_n - s| < \frac{1}{n}$, was immer erreichbar ist durch Bildung einer Teilfolge. Nun existiert für alle $y_n \in H$ ein $x_m = x_{m(n)} \in (x_n)$ so dass $|x_{m(n)} - y_n| < \frac{1}{n}$. Dann folgt $|x_{m(n)} - s| \leq |x_{m(n)} - y_n| + |y_n - s| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ und somit im Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{m(n)} - s| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ Dass heißt s ist Grenzwert der $(x_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und damit selbst ein Häufungspunkt. Dies nennt man ein Diagonalisierungsargument, wobei $\therefore$ der Zahlenfolge $x_{m(n)}$ entspricht.

$$\begin{array}{cccccc}
a_1 & \leftarrow & x_{1n} & \dots & x_{12} & x_{11} \\
\vdots & & & & \iddots & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & & \iddots & & & \\
a_n & \leftarrow & x_{nn} & \dots & x_{n2} & x_{n1} \\
\vdots & \iddots & & & & \\
s & & & & &
\end{array}$$

3.6 Lemma: Direkte Charakterisierung von Limsup und Liminf

$s := \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ genau dann wenn es minimal ist bezüglich der Eigenschaft:
Für alle $\epsilon > 0$ existiert $n = n(\epsilon)$ so dass $x_m < s + \epsilon$ für alle $m \geq n(\epsilon)$:

Entsprechend für $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$.

Bemerkung: Ähnlich wie wirkliche Grenzwerte erfüllen auch $\underline{\lim}, \overline{\lim}$ bestimmte Rechenregeln, die die Auswertung und Abschätzung erleichtern.

3.7 Satz: Eigenschaften von Limes superior und Limes inferior

Für beschränkte Folgen $(x_n), (y_n)$ gilt:

i). Subadditivität: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n + y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \sup(y_n)$

ii). Positive Homogenität: $c > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup(cx_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n)$

iii). $c < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup(cx_n) = -c \lim\limits_{n\to\infty} \sup(-x_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} \inf(x_n)$

iv). $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(x_n) \geq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} \inf(y_n) \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n) \lim\limits_{n\to\infty} \sup(y_n)$

v). $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(y_n) = b > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup(\frac{x_n}{y_n}) \leq \frac{1}{b} \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n)$

Abschliessende Frage: Lässt sich die Konvergenzeigenschaft einer beliebigen Folge (x_n) formulieren und gegebenenfalls untersuchen ohne schon explizit den Grenzwert x_* zu benennen?

Antwort: Ja, es gibt eine notwendige und hinreichende auf Cauchy zurückgehende Bedingung.

3.8 Satz: Cauchy-Folge

Eine reelle Folge konvergiert genau dann wenn sie eine Cauchy-Folge ist, dass heißt die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\text{für alle } \epsilon > 0 \text{ existiert } n = n(\epsilon) \text{ so dass } |x_m - x_{m'}| < \epsilon \text{ für alle } m, m' \geq n$$

Beweis

i). "$\Rightarrow$" : Sei $|x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $m \geq \tilde{n}(\epsilon)$, dann gilt für $m, m' \geq n(\epsilon)$:

$$|x_{m'} - x_m| = |x_{m'} - x_* + x_* - x_m| \overset{Dreiecksungl.}{\leq} |x_{m'} - x_*| + |x_* - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Mit anderen Worten Behauptung für $n(\epsilon) = \tilde{n}(\frac{\epsilon}{2})$

ii). "$\Leftarrow$": Zunächst folgt mit $n_1 = n(1)$ aus Cauchy-Kriterium, dass $|x_n| \leq \max(|x_1|, \ldots, |x_{n_1 - 1}|, |x_{n_1}| + 1)$, da für $n \geq n_1$ sicher $|x_n - x_{n_1}| < 1 \Rightarrow |x_n| < |x_{n_1}| + 1$. Also ist Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt nach Bolzano Weierstrass eine konvergierende Teilfolge $x_{h(n)} \to x_*$. Für beliebiges ϵ gibt es ein beliebig groß $m(n)$ mit $|x_{h(n)} - x_*| < \frac{\epsilon}{2}$ und es gibt ein $n(\frac{\epsilon}{2})$, so dass für alle $m' > n(\frac{\epsilon}{2})$ gilt:

$$|x_{m'} - x_*| \leq |x_{m'} - x_{h(n)}| + |x_{h(n)} - x_*| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Also konvergiert die gesamte Folge (x_n) gegen x_*.

4 Unendliche Reihen

4.1 Definition: Reihe

Für gegebene reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet man $s_n = \sum\limits_{k=n_0=1}^{n} a_k$ für $n \in \mathbb{N}$ als die Folge der Partialsummen. Falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Die rechte Seite nennt man unendliche Reihe und schreibt dies oft erstmal hin bevor die Frage der Konvergenz untersucht wird. Mit anderen Worten: Die Reihe ist eine abzählbare Menge von Summanden, die in vorgegebener Reihenfolge summiert werden sollen.
(Das gelingt nicht immer, da z.B.: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$ noch nicht mal einen uneigentlichen Grenzwert hat.)

Erläuterung zu Summationsanfang "n_o": Dieser Summationsanfang wird häufig als 0 oder 1 gewählt, hat aber sowieso keinen Einfluss auf Frage der Konvergenz. Es gilt für s_n definiert von n_0 und $s_{n'}$ definiert von $n_0' > n_0$:

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k = \overbrace{\sum_{k=n_0}^{n_0'-1} a_k}^{c \text{ unabh. von } n} + \sum_{k=n_0'}^{n} a_k = \sum_{k=n_0}^{n_0'-1} a_k + s_n' \tag{II.4}$$

$$\Rightarrow s_n = c + s_n' \tag{II.5}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = c + \lim_{n\to\infty} s_n' \tag{II.6}$$

In Reihenschreibweise: $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=n_0}^{n_0-1} a_k + \sum\limits_{k=n_0'}^{\infty} a_k$ Wie bei Folgen spielen auch bei Reihen $\Leftrightarrow$ endlich viele Anfangsglieder keine wesentliche Rolle bezüglich des Konvergenzverhaltens.

Beispiele

i). $a_k = aq^k \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$ hat Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} aq^k = a\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = a\frac{(1-q^{n+1})}{1-q}$, falls $q \neq 1$

(a) $|q| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^{n+1})}{(1-q)} = \frac{a}{(1-q)} \lim_{n\to\infty}(1-q^{n+1}) \tag{II.7}$$

$$= \frac{a}{(1-q)}(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}) = \frac{a}{1-q} \tag{II.8}$$

(b) $q > 1, a \neq 0$:

$\frac{a}{1-q}(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}) = sign(a)\infty$, unendlicher Grenzwert, bestimmte Divergenz

(b') $q = 1$:

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k = \sum\limits_{k=k}^{\infty} a1^k = sign(a)\infty$, unendlicher Grenzwert, bestimmte Divergenz.

(c) $q \leq -1$:

$\Rightarrow s_n = \frac{a}{(1-q)}(1-q^{n+1})$ ist divergent, da für $q < -1$ ist $q^{2n'+1} \to -\infty$ und $q^{(2n'+1)+1} \to +\infty$, oder für $q = -1$ ist $s_n \in \{0, \frac{2a}{1-q}\}$ alternierend.

ii).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \tag{II.9}$$

$$\Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_n} = \underbrace{1 - \frac{1}{n+1}}_{monoton\ steigend} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \tag{II.10}$$

4.2 Satz: Cauchy-Kriterium für Reihen

Eine Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn

$$\text{für alle } \epsilon > 0 \text{ existiert } n(\epsilon) : |\sum_{k=m}^{m'} a_n| < \epsilon \text{ falls } n(\epsilon) \leq m \leq m'$$

Beweis

Konvergenz der Reihe $\Leftrightarrow$ (s_n) ist Cauchy-Folge und per Definition
$|s_{m'} - s_m| = |\sum\limits_{k=n_0}^{m'} a_k - \sum\limits_{k=n_0}^{m} a_k| = |\sum\limits_{k=m+1}^{m'} a_k| < \epsilon$ laut Cauchy-Kriterium. $\square$

'Gegenbeispiel:' Divergenz der Harmonische Reihe

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfüllt Cauchy-Kriterium nicht, da für $m = 2^p$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $m' = 2^{p+1}$ gilt:

$$s_{m'} - s_m = \sum_{k=1}^{m'} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} = \frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} \dots \frac{1}{2^p+2^p} \geq \frac{2^p}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Da p und damit m,m' beliebig gross gewählt werden können, kann $|s_{m'} - s_m|$ nicht unter $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ gedrückt werden: $1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$

Durch Induktion lässt sich überprüfen, dass $s_{(2^p)} \geq \frac{1}{2}(p+1)$ für $p \in \mathbb{N}$, dass heißt, die monoton wachsende Folge der Partialsummen s_n wächst also unbeschränkt und wir haben bestimmte Divergenz zu ∞ .

Bemerkung: notwendige Bedingung für Konvergenz

Aus dem Cauchy-Kriterium folgt für $m = n + 1$, dass: für alle $\epsilon > 0$ existiert $n(\epsilon) : |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \epsilon$. Mit anderen Worten: $|a_k|$ müssen eine Nullfolge bilden, falls s_n konvergent ist.
Wie man aus dem Gegenbeispiel sieht, ist dies jedoch nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium, da zwar $\frac{1}{k} \to 0$, aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Die $|a_k|$ müssen also im allgemeinen hinreichend schnell gegen Null konvergieren.
Ausnahme: alternierende Reihen.

4.3 Definition: alternierende Reihen

Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt alternierend, wenn für $k \in \mathbb{N} : a_k a_{k+1} < 0$.

4.4 Satz: Leibnizkriterium

Eine alternierende Reihe, für die die Betrge $|a_k|$ monoton fallende Nullfolge bilden, ist konvergent.

Beweis

o.B.d.A.: $a_0 = s_0 \Rightarrow |a_n| = a_k(-1)^k \Rightarrow a_{2k} > 0 \wedge a_{2k+1} < 0$

$$s_{2k+2} = s_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2} = s_{2k} - |a_{2k+1}| + |a_{2k+2}| \leq s_{2k} \leq s_{2k-2} \leq \ldots \leq s_0 \quad \text{(II.11)}$$
$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1} = s_{2k-1} + |a_{2k}| - |a_{2k+1}| \geq s_{2k-1} \geq s_{2k-3} \ldots \geq s_1 \quad \text{(II.12)}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{l} s_{2k+2} = s_{2k+1} + a_{2k+1} \geq s_{2k+1} \geq s_1 \\ s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_0 \end{array} \quad \text{(II.13)}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{c} s_{2k} \text{ fallende, durch } s_1 \text{ nach unten beschränkte Folge} \\ s_{2k+1} \text{ steigende, durch } s_0 \text{ nach oben beschränkte Folge} \end{array} \quad \text{(II.14)}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1}$ existieren und $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1} - \lim\limits_{k\to\infty} s_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$
Also $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1} =: s$.
Sei jetzt $\epsilon > 0$, dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ so dass

$$|s_{2k} - s| < \epsilon \text{ für alle } k \geq n_1, \qquad |s_{2k+1} - s| < \epsilon \text{ für alle } k \geq n_2.$$

Setze $n_0 := \max(2n_1, 2n_2)$ und dann gilt

$$|s_n - s| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Beispiel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots \ = \ s \ [= \log(2) = 0.6931\ldots]$$

wobei sich nur die Existenz des Grenzwertes s nicht aber sein in Klammern angegebener durch den natürlichen Logarithmus definierter Wert aus dem Leibnizkriterium ergibt.
Warnung: Leibniz-Kriterium nicht unabhängig von Umsortieren der Reihenglieder.

4.5 Definition: absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

4.6 Satz:Verhältnis absoluter und normaler Konvergenz

Gewöhnliche Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$ folgt aus absoluter Konvergenz. Letzteres ist äquivalent zur Existenz einer Schranke c, so dass: $c \geq \sum_{k\in\mathbb{J}} |a_k|$ für beliebiges endliches $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}$.

4.7 Korollar: Umsortierung/Umordnung absolut konvergenter Reihen

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{h(k)}$ absolut konvergent für eine beliebige Bijektion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Mit anderen Worten: Absolut konvergente Reihen können beliebig umsortiert werden.

Beweis zum Satz

Cauchy-Kriterium für $\sum |a_k|$ impliziert Cauchy-Kriterium für $\sum a_k$, da für beliebiges m,m':

$$|\sum_{k=m+1}^{m'} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{m'} |a_k| \quad \text{(II.15)}$$

nach Dreiecksungleichung. Dass heißt absolute Konvergenz impliziert gewöhnliche Konvergenz.
Für $\mathbb{J} = \{1, 2, \cdots, n\}$ impliziert letzte Aussage, dass $\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k\in\mathbb{J}} |a_k| \leq c$. Die monoton steigenden Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ haben also obere Schranke und damit einen Grenzwert. Umgekehrt hat jedes endliche $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}$ ein maximales Element m, so dass:

$$\sum_{k\in\mathbb{J}} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| =: c < \infty\Box \quad \text{(II.16)}$$

4.8 Satz: Umordnungssatz von Riemann

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert aber nicht absolut konvergiert, dann gibt es für jeden Zielwert $a \in [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ eine Umordnung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_{h(k)} = a$. Es gibt auch Umordnungen für die $\sum_{k=0}^{\infty} a_{h(k)}$ weder eigentlich noch uneigentlich konvergiert, d.h. wirklich divergiert.

Bemerkung

Die meisten Konvergenzkriterien stellen die stärkere Eigenschaft der absoluten Konvergenz sicher.

4.9 Satz: allgemeine harmonische Reihe

Für beliebigen Exponenten $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} \begin{cases} = \infty & \text{falls } c \leq 1 \\ \in (0, \infty) & \text{falls } c > 1 \end{cases}$$

Mit anderen Worten: Für $c \leq 1$ divergiert die Reihe bestimmt gegen ∞ . Für $c > 1$ gibt es einen positiven endlichen Grenzwert.

Beweis

$c \leq 1 : \Rightarrow \frac{1}{k^c} = \frac{k^{1-c}}{k} \geq \frac{1}{k}$ da $k^{1-c} \geq 1$ für $c \leq 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^c} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ wegen Divergenz der harmonischen Reihe.
$c > 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^p-1} \frac{1}{(2^p+j)^c} = \underbrace{1}_{p=0} + \underbrace{\frac{1}{2^c} + \frac{1}{3^c}}_{p=1} + \underbrace{\frac{1}{4^c} + \frac{1}{5^c} + \frac{1}{6^c} + \frac{1}{7^c}}_{p=2} + \cdots \tag{II.17}$$

$$\leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p}{(2^p)^c} = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{p(1-c)} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(c-1)}}\right)^p \tag{II.18}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p}{(2^p)^c} = \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \Bigg(\overset{q}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2^{c-1}}}}\Bigg)^p}_{\text{geom. Reihe}} = \sum_{p=0}^{\infty} q^p = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{c-1}}} = \frac{2^{c-1}}{2^{c-1}-1} < \infty \tag{II.19}$$

Mit anderen Worten: Die Partialsummen $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^c}$ sind monoton steigend und beschränkt, also existiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} < \infty$

4.10 Satz: Konvergenzkriterien

Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ muss absolut konvergieren falls sie eines der folgenden Kriteriun erfüllt:

i). Majorantenkriterium: $|a_k| \leq |b_k|$ für alle k und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$

ii). Quotientenkriterium: $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$

iii). Wurzelkriterium: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

Beweis

i). Partialsummen $\sum\limits_{k=0}^{n}|a_k| \le \sum\limits_{k=0}^{n}|b_k| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty}|b_k| < \infty$ sind beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. Daraus folgt absolute Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

ii). Für $\epsilon = \frac{1}{2}(1-q)$ existiert $n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} < q + \epsilon = \frac{1}{2}(q+1) < 1$ für alle $m \ge n(\epsilon)$. Also gilt ab $m = n(\epsilon)$:$|a_m| = \frac{|a_m|}{|a_{m-1}|}|a_{m-1}| \le \frac{1}{2}(1+q)|a_{m-1}| \le \{\frac{1}{2}(1+q)\}^{m-n(\epsilon)}|a_{n(\epsilon)}|$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=n(\epsilon)}^{\infty}|a_m| \le |a_{n(\epsilon)}| \sum\limits_{k=n(\epsilon)}^{\infty}\{\frac{1}{2}(1+q)\}^{k-n(\epsilon)} = |a_{n(\epsilon)}|\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+q)} = \frac{|a_{n(\epsilon)}|}{\frac{1}{2}(1-q)} < \infty$

iii). $r := \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|$ konvergiert.
Für $\epsilon = \frac{1}{2}(1-r) > 0$ existiert $n(\epsilon) \in \mathbb{N} : (|a_k|)^{\frac{1}{k}} \le \tilde{r} = r + \epsilon = \frac{1}{2}(r+1) < 1$ für alle $k \ge n(\epsilon) \Rightarrow |a_k| \le \tilde{r}^k \Rightarrow \sum\limits_{k=n(\epsilon)}^{\infty}|a_k| \le \sum\limits_{k=n(\epsilon)}^{\infty}\tilde{r}^k = \frac{\tilde{r}^{n(\epsilon)}}{1-\tilde{r}} < \infty$

Bemerkung

i). $r \le q$, mit $r = q$ falls $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$

ii). $r > 1$ impliziert Divergenz aber $q > 1$ ermöglicht keine Aussage

iii). $r = 1$ oder $q = 1$ keine Aussage, d.h.: Konvergenz und Divergenz möglich

5 b-adische Zahlendarstellung, Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

5.1 Definition: b-adische Zahldarstellung

Sei ein $b \in \mathbb{N}, b \ge 2$ als Basis der Zahldarstellung fixiert und sei $z_j \in \{0, 1, \dots b-1\}$ für $-m \le j \in \mathbb{Z}$ eine Folge von sogenannten *Ziffern*. Dann ist der sogenannte Gleitkommaausdruck $z_{-m}\, z_{-m+1} \dots z_0 \,.\, z_1\, z_2 \dots z_j \dots$ eine Kurzform für die Reihe $\sum\limits_{j-m}^{\infty} z_j b^{-j}$. Im deutschsprachigen Raum wird der Punkt nach der mit b^0 assoziierten Ziffer z_0 häufig weiterhin durch ein Komma ersetzt. Bei Taschenrechnern und Computersoftware ist das eher selten.

5.2 Lemma: Konvergenz der Darstellung

Die Reihe $\sum\limits_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-j}$ konvergiert immer.

Beweis

$0 \le z_j \le b-1$ für alle $j = -m, \dots, 0, 1, \dots$, dass heißt die geometrische Reihe $\sum\limits_{j=-m}^{\infty}(b-1)b^{-j}$ ist eine konvergente Majorante

Bemerkung

Mit Überstrich bezeichnet man eine unendliche Wiederholung der letzten Ziffer so dass inbesondere $0,(b-1)(b-1)\overline{(b-1)} = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(b-1)b^{-j} = (b-1)\frac{b^{-1}}{1-b^{-1}} = 1,00\overline{0}$

5.3 Satz: Existenz der Darstellung

Jedes $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ hat eine Darstellung

$$x = \sum_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-j} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad z_j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$$

Beweis

Die Potenz $(b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ wächst über alle Grenzen $\Rightarrow$ existiert $k \in \mathbb{N} : x < b^k \Rightarrow$ es gibt ein minimales $k = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $0 \leq x < b^{m+1} \Rightarrow 0 \leq b^{-m}x < b$

Setze: $z_{-m} = \lfloor b^{-m}x \rfloor \in \{0, \ldots, b-1\} \Rightarrow b^{-m}x - z_{-m} \in [0, 1) \Rightarrow 0 \leq x_{-m} := x - z_{-m}b^m < b^m$. Auf dieser Weise, lässt sich induktiv eine Folge $z_{-m}, \ldots, z_k$ konstruiren: Seien $z_{-m}, \ldots, z_k$ bestimmt mit $0 \leq x_k := x - \sum_{j=-m}^{k} z_j b^{-j}$ und $0 \leq b^k x_k < 1$

Setze: $z_{k+1} = \lfloor b^{k+1}x_k \rfloor \in \{0, \ldots, b-1\}$
$\Rightarrow x_k b^{k+1} - z_{k+1} \in [0, 1) \Rightarrow 0 \leq x_{k+1} := x_k - z_{k+1}b^{-(k+1)} < b^{-(k+1)}$
$\Rightarrow$ Vorraussetzung für den nächsten Rekursionsschritt ist erfüllt.
$0 \leq x_{k+1} < b^{-(k+1)}$, also gilt $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 \Rightarrow x = \sum\limits_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-1} \Rightarrow$ Existenz der Darstellung.

Bemerkung

Unter der Einschränkung dass $z_j \neq b-1$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$ also nicht alle Endziffern gleich $b-1$ sind ist die Darstellung eindeutig. Bei der obigen rekursiven Konstruktion ist das automatisch erfüllt.

5.4 Satz: Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Beweis

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ enthalten die Teilmenge

$$M \;=\; \{\sum_{j=1}^{\infty} z_j 10^{-j}; z_j \in \{0, 1 \ldots 8\}\} \subset [0, 1)$$

Angenommen diese wären abzählbar, d.h. als Folge x_k durchnumerierbar. Bezeichne mit $z_{k,k}$ die k-te Ziffer in der Entwicklung von x_k. Dann könnte man $z_{k,k}$ jeweils um eins erhöhen zu $\tilde{z}_{k,k} = z_{k,k}+1$ wenn $z_{k,k} < 8$ und alle $z_{k,k} = 8$ um 1 auf $\tilde{z}_{k,k} = 7$. Dann ist die neue Zahl

$$\tilde{x} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_{k,k} 10^{-k} \;=\; 0\,.\,\tilde{z}_{1,1}\,\tilde{z}_{2,2}\,z_{3,3}\ldots\,\tilde{z}_{k,k}\ldots$$

ungleich aller x_k, da sie sich in der Diagonalen unterscheiden. Gleichzeitig gehört $\tilde{x}$ sicher zu M müsste also bei der Aufzahlung vorkommen, was einen Widerspruch darstellt. $\Box$.

5.5 Definition: Potenzreihe

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge von Koeffizienten und $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Variable heißt:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ oder } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_n)^n \text{ für festes } x_0 \in \mathbb{R}$$

eine Potenzreihe (am Punkt x_0). $P(x)$ reduziert zu Polynom $\Leftrightarrow a_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

5.6 Satz: Konvergenzradius von reellen Potenzreihen

Falls $r = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, dann konvergiert die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut für alle $x \in (-\rho, \rho)$, wobei der Konvergenzradius ρ gegeben ist durch

$$\rho = \begin{cases} 0 \ falls \ r = \infty \\ \frac{1}{r} \ falls \ r > 0 \\ \infty \ falls \ r = 0 \end{cases}$$

In letzteren Fall konvergiert $P(x)$ absolut für beliebige $x \in \mathbb{R}$. Falls $|x| > \rho$, dann ist die Potenzreihe divergent. Für $|x| = r$ ergibt sich keine Aussage so dass die beiden Grenzfälle $x = \pm\rho$ einzeln untersucht werden müssen.

Beweis

Anwendung auf Wurzelkriterium auf $P(x)$ ergibt Bedingung:

$$\begin{aligned} 1 > \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n x^n|} &= \lim_{n\to\infty} \sup |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= |x| r \Leftarrow \text{ falls } r = 0 \text{ und } |x| \in \mathbb{R} \text{ oder } r > 0 \text{ und } |x| < \tfrac{1}{r} = \rho. \end{aligned}$$

Falls $|x| > \rho \Rightarrow |x|r > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|x|^n |a_n|} > 1 \Rightarrow$ unendlich viele Terme $|x|^n |a_n| > 1. \Rightarrow a_n x^n$ keine Nullforlge $\Rightarrow$ Divergenz der Reihe.

Beispiele für Potenzreihen

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \quad$ mit $\quad P(0) = a_0 0^0$

i). $a_k = 1$ für $k \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} x^k \Rightarrow q = r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow Konvergenzradius\, \rho = \frac{1}{1} = 1$

- $|x| < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz gegen $\frac{1}{1-x}$
- $x = 1 \Rightarrow$ Bestimmte Divergenz gegen ∞
- $x = -1 \Rightarrow$ unbestimmte Divergenz, da $a_k = (-1)^k$ nicht Nullfolge
- $x > 1 \Rightarrow$ Bestimmte Divergenz gegen ∞
- $x < -1 \Rightarrow$ Unbestimmte Divergenz.

ii). $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} (-1)^{k-1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$

Positiver Konvergenzradius $\rho = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

- $|x| < \rho = 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz gegen $\ln(1+x) \leftarrow$ später zu zeigen.
- $x = 1 \Rightarrow$ alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots = \log(2)$
- $x = -1 \Rightarrow$ harmonische Reihe $\Rightarrow$ Divergenz gegen $-\infty$
- $x < -1 \Rightarrow$ bestimmte Divergenz gegen $-\infty$
- $x > 1 \Rightarrow$ unbestimmte Divergenz

iii). $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$

Nach Quotientenkriterium $q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|(n!)}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \Rightarrow r = q = 0 \Rightarrow \rho = \infty$, dass heißt für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert P(x) absolut gegen Wert, den man mit $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ bezeichnet.

Bemerkung: Die Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius bilden einen linearen Vektorraum.

5.7 Lemma: Verknüpfung (+) von Potenzreihen

Falls $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ die Konvergenzradien ρ_1, ρ_2 haben, dann haben die Linearkombination: $R(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x^n$ für beliebige Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ einen Konvergenzradius $\rho \geq \frac{1}{2}\min(\rho_1, \rho_2) > 0$

Beweis

$$
\begin{aligned}
r = \limsup \sqrt[k]{|\alpha a_k + \beta b_k|} &\leq \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|\alpha||a_n|} + \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|\beta||b_n|} \\
&= \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha|}}_{=1} \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\beta|}}_{=1} \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|b_k|} \\
&= \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung: $\sqrt[k]{|a| + |b|} \leq \sqrt[k]{|a|} + \sqrt[k]{|b|}$, da nach bin. Lehrsatz

$$
\left(\sqrt[k]{|a|} + \sqrt[k]{|b|}\right)^k = |a| + |b| + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} |a|^{\frac{j}{k}} |b|^{\frac{k-j}{k}} \geq |a| + |b|,
$$

also folgt $\sqrt[k]{|a|} + \sqrt[k]{|b|} \geq \sqrt[k]{|a| + |b|}$

Mit $r \leq \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{r} \geq \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} \geq \frac{1}{2}\min(\rho_1, \rho_2)$ $\square$

Bemerkung: Innerhalb ihres absoluten Konvergenzbereiches können Potenzreihen beliebig genau durch endliche Partialsummen angenähert werden.

5.8 Satz: Restgliedabschätzung

Hat $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den positiven Konvergenzradius $\rho > 0$, dann existiert für jedes $n > 1$ und $\tilde{\rho} < \rho$ ein $c \in \mathbb{R}$, so dass: $|P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| \leq c|x|^n$ für $x \in [-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}] \subset (-\rho, \rho)$

Beweis

$$
\begin{aligned}
|P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| = |\sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||x|^k = |x|^n \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||x|^{k-n} \\
= |x|^n & \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}\tilde{\rho}^k|}_{=c\in\mathbb{R}\text{, da Reihe absolut konvergent}} \leq c|x|^n
\end{aligned}
$$

5.9 Korollar: Potenzreihen am Ursprung

Falls $P(x)$ positiven Konvergenzradius hat un $P(0) = a_0 \neq 0$, dann existiert ein $\hat{\rho} \in (0, \rho)$, so dass $P(x) \neq 0$ für alle $x \in (-\hat{\rho}, \hat{\rho})$

Beweis

Laut Satz **??** gilt $|P(x) - a_0| \leq c|x|$, für alle $x \in (-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2})$. Sei $a_0 > 0 \Rightarrow P(x) \geq a_0 - c|x| > 0$ falls $|x| < \min(\frac{\rho}{2}, \frac{a_0}{c})$. Sei $a_0 < 0 \Rightarrow P(x) \leq a_0 + c|x| < 0$ falls $|x| < \min(\frac{\rho}{2}, \frac{-a_0}{c})$. Wir können also immer $|x| < \hat{\rho} := \min(\frac{\rho}{2}, \frac{|a_0|}{c})$ wählen.

5.10 Satz: Identitätssatz von Potenzreihen

Falls $P(x) = \sum a_k x^k$ und $Q(x) = \sum b_k x^k$ positiven Konvergenzradius haben und an einer Nullfolge $x_n \to 0$ mit $0 \neq x_n$ übereinstimmen, dass heißt $P(x_n) = Q(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$.
Interpretation: Durch Potenzreihen um Ursprung $x = 0$ entwickelbare Funktionen sind durch abzählbare Folge $x_n \to 0$ eindeutig definiert (Vergleiche: Polynominterpolation).

5.11 Definition: Cauchy-Produkt

Für zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ bezeichnet man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \in \mathbb{R}$ als das Cauchy-Produkt der beiden Reihen.
Frage: Unter welchen Bedingungen gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$?

Gegenbeispiel

$$P(x) = Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{1+i}} \text{ konvergiert nach Leibizkriterium,}$$

aber

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+i}} \frac{1}{\sqrt{1+n-i}}$$

und daraus folgt

$$|c_n| = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(1+i)(1+n-i)}} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{2+n} = \frac{n+1}{1+\frac{n}{2}} \to 2 \neq 0.$$

also konvergiert das Cauchy-Produkt nicht.

5.12 Satz: Konvergenz des Cauchy-Produktes

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren, dann konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt, und zwar so dass $(\sum_{n=0}^{\infty} c_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$

Beweis

Siehe Vorlesung.

Beispiel

$a_k = \frac{x^k}{k!}, b_n = \frac{y^n}{n!}$ absolut konvergent für $x, y \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \exp(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \exp(y)$:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} = \frac{1}{n!}(x+y)^n \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y) \text{ definitionsgemäss.} \end{aligned}$$

Kapitel III

Stetigkeit und Konvergenz

1 Stetigkeit reeller Funktionen

Motivation: Nullstellensuche
Sei $a < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Suche $x^* \in (a,b)$ mit $f(x^*) = 0$.
Betrachte: $M = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$ mit: $M \neq \emptyset$, weil $a \in M$
M ist durch b nach oben beschränkt $\Rightarrow$ Supremum existiert in $\mathbb{R}$: $\quad x_1 := \sup M \quad (\in [a,b])$
(analog gibt es $x_2 := \inf\{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}$).
Nach Konstruktion und Definition des Supremums:

$$\text{für alle } \epsilon > 0 \text{ existiert } \underline{x}, \overline{x} \in [a,b] : x_1 - \epsilon < \underline{x} \leq x_1 \leq \overline{x} < x_1 + \epsilon \text{ mit } f(\underline{x}) < 0 < f(\overline{x}).$$

x_1 ist Kanditat für eine Nullstelle. Aber gilt auch $f(x_1) = 0$?

Beispiele:

i). $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x & \text{, falls } x < 0 \\ 5 & \text{, falls } x = 0 \\ 2x & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$
$x_1 = x_2 = 0$, aber $f(0) = 5$.

ii). $f(x) = 2x - 1, \quad x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 0$

Forderung: Funktionswert in x sollte nicht zu stark von Funktionswerten nahe x abweichen.

1.1 Definition: Stetigkeit

$D \subset \mathbb{R}, x \in D, f : D \to \mathbb{R}$, f ist stetig in x genau dann wenn:

$$\text{für alle } \epsilon > 0 \text{ existiert } \delta > 0 \text{ so dass für alle } y \in D : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$$

Äquivalent kann man auch die folgende Mengeninklusion verlangen

$$f(D \cap (x - \delta, x + \delta)) \subset (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$$

Die Funktion f heisst stetig (auf D), falls f sie an jedem $x \in D$ stetig ist.

Beispiele:

i). $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstant, $D = \mathbb{R}$. f ist stetig an allen $x_0 \in D$, da $f(x) - f(x_0) = 0 < \epsilon$ für alle $x \in D$, für alle ϵ und beliebige δ.

ii). $f(x) = x \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f ist stetig an allen $x_0 \in \mathbb{R}$. Da $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$ kann man zu beliebigen $x_0 \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, genau $\delta = \epsilon$ wählen.

iii). $f(x) = \sqrt{x}$ auf $D = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ ist stetig auf ganz D.
1.Fall: $x_0 > 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leq \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$. Für festes x_0 und $\epsilon > 0$ setze $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon$. Dann folgt aus $|x - x_0| < \delta$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} = \epsilon.$$

Daraus folgt dass f an alle Stellen $x_0 > 0$ stetig ist.
2.Fall: $x_0 = 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \sqrt{x}$. Setze $\delta = \epsilon^2 > 0$. Dann folgt aus $|x| = |x - x_0| < \delta$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{x} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon.$$

Daraus folgt dass f an $x_0 = 0$ stetig ist.

iv). 1. Beispiel eine wichtige nicht stetige Funktion

$$sign(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig, da $|f(x) - f(x_0)| = 1$ falls $x \neq 0$.

v). 2. Beispiel eine wichtige nicht stetige Funktion: *Dirichlet–Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, aber nirgends stetig.

1.2 Satz: Verknüpfung stetiger Funktionen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D, f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0. Wenn außerdem $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Beweis

Laut Voraussetzung existieren für jedes Paar ϵ_f, ϵ_g ein Paar δ_f, δ_g so dass für alle $x \in D$ gilt

$$|x - x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon_f$$
$$|x - x_0| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon_g$$

Sei $h(x) := f(x) + g(x)$. Für gegebenes $\epsilon > 0$ wähle $\epsilon_f = \frac{1}{2}\epsilon$ und $\epsilon_g = \frac{1}{2}\epsilon$. Dann gilt für $\delta := \min(\delta_f, \delta_g)$ mit resultierenden δ_f, δ_g, dass

$$\begin{aligned} &|h(x) - h(x_0)| = |f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))\,| = |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \epsilon_f + \epsilon_g = \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist $h(x) = f(x) + g(x)$ stetig an x_0. Analog folgt die Stetigkeit von $h(x) := f(x) - g(x)$.
Sei jetzt $h(x) := g(x)f(x)$.

$$\begin{aligned} &|h(x) - h(x_0)| = |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| = |f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\leq |g(x)||f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$, wähle $\epsilon_g \leq \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{|f(x_0)|}$ und $\epsilon_f \leq \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{|g(x_0)|+\epsilon_g}$; entsprechend gibt es δ_f und δ_g so dass letzlich $\delta := \min(\delta_f, \delta_g)$ die Stetigkeit verifiziert.
$h(x) := \frac{g(x)}{f(x)}$ Übung.

1.3 Korollar:

Alle Polynome $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig. Alle rationalen Funktionen $\frac{f(x)}{g(x)}$, mit f, g Polynome, sind an allen x_0 mit $g(x_0) \neq 0$ stetig.

Beweis

Jedes Polynom lässt sich durch endlich viele Additionen und Multiplikationen aus x und Konstanten als zusammengesetzte Funktion berechnen. □

1.4 Satz: Nullstellensatz

Seien $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann gibt es ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$.

Beweis

O.B.d.A.: $f(a) < 0 < f(b)$. Setze $x^* = \sup(M)$ mit $M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$. Da $a \in M$ und $0 < f(b)$, gilt dass $x^* = \sup(M)$ wirklich existiert und $x^* \in [a, b]$.
Annahme: $f(x^*) \neq 0$ im Gegensatz zu Behauptung. Aus Stetigkeit folgt dann für $\epsilon = \frac{1}{2}|f(x^*)|$ existenz von $\delta > 0$ sodass $[a, b] \cap |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \epsilon = \frac{1}{2}|f(x^*)|$. Also gilt für $x \in [a, b]$, $|x - x^*| < \delta$

$$f(x^*) - \frac{1}{2}|f(x^*)| \leq f(x) \leq f(x^*) + \frac{1}{2}|f(x^*)|$$

Falls $f(x^*) > 0$ wäre müsste gelten $x^* > a$, und die obere Ungleichung implizierte dass $f(x) \geq f(x^*) - \frac{1}{2}|f(x^*)| = \frac{1}{2}f(x^*) > 0$, für $x \in (x^* - \delta, x^*] \cap [a, b]$. Das hiesse $x_* \in (x^* - \delta, x^*) \cap [a, b]$ wäre obere Schranke von M, ein Wiederspruch zur Definition von x^*.
Entsprechend schliessen wir die andere Möglichkeit aus, diesmal nicht im Konjunktiv, was allgemein eine Geschmacksfrage ist. Falls $f(x^*) < 0$ gilt $x^* < b$, und die obere Ungleichung impliziert dass $f(x) \leq f(x^*) + \frac{1}{2}|f(x^*)| = \frac{1}{2}f(x^*) < 0$, für $x \in [x^*, x^* + \delta) \cap [a, b]$. Das heißt für $x_* \in (x^*, x^* + \delta) \cap [a, b]$ gilt $f(x) < 0$, ein Wiederspruch zur Definition von x^*. □

1.5 Korollar: Zwischenwertsatz

Falls f auf $[a, b]$ stetig ist, dann wird jeder Wert $y \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$ an einer Stelle $x_* \in [a, b]$ angenommen, d.h existiert x_* mit $f(x_*) = y$.

Beweis

Anwendung von Nullstellensatz auf $g(x) := f(x) - y$. □

1.6 Lemma: Komposition von stetigen Funktionen

Für $E, D \subseteq \mathbb{R}$ seien $g : D \to \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subseteq E$ und g stetig an $x_0 \in D$ bzw $g(x_0) \in E$. Dann ist $f \circ g$ stetig in x_0.
(Erinnerung: $(f \circ g)(x) := f(g(x)), f \circ g : D \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$)

Beweis

Sei $\epsilon > 0$ beliebig fix. Wegen Stetigkeit von f in $g(x_0)$ existiert $\gamma > 0$ so dass:

$$\text{für alle } y \in E : |y - g(x_0)| < \gamma \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

Wegen Stetigkeit von g in x_0 existiert für das gegebene γ ein $\delta > 0$ so dass

$$\text{für alle } x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \gamma$$

$$\underset{g(x) \in E}{\Rightarrow} \text{ für alle } x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon \ \square$$

1.7 Satz: Äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind quivalent:

i). f stetig in x_0

ii). Für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$

Beweis

i). ($\Rightarrow$) Sei $\epsilon > 0$ beliebig fixiert.
Nach Definition von Stetigkeit in x_0 existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$
Nach Definition existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\text{für alle } n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

ii). ($\Leftarrow$) Angenommen f ist nicht stetig in x_0, dass heit existiert $\epsilon_0 > 0$ so dass für alle $\delta > 0$ existiert $x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

Betrachte $\delta_n := \frac{1}{n}$. Fixiere ϵ_0.
Also existiert $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon \Rightarrow x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$ $\square$

1.8 Definition: Eigenschaften von Mengen im $\mathbb{R}$

Eine Untermenge $D \subset \mathbb{R}$ wird bezeichnet als:

- *abgeschlossen*, falls $(x_k) \subset D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x \in \mathbb{R}$ impliziert dass auch x zu D gehört. Mit anderen Worten: Jeder Häufungspunkt einer Folge aus D gehört zu D.
- *offen*, falls $C_D = \mathbb{R}\backslash D = \{x \in \mathbb{R} : x \notin D\}$ abgeschlossen ist.
- *beschränkt*, falls $\sup(|x| : x \in D) < \infty$
- *kompakt*, falls beschränkt und abgeschlossen

1.9 Satz: Weierstraß

Sei $K \subset \mathbb{R}$ nichtleer und kompakt sowie $f : K \to \mathbb{R}$ stetig auf K. Dann existiert $x_*, x^* \in K$ so dass

$$f(x_*) = \min_{x\in K} f(x) \quad \text{und} \quad f(x^*) = \max_{x\in K} f(x)$$

.

Beweis

Annahme: f unbeschränkt auf K, dass heißt $\{|f(x)| \mid x \in K\}$ ist unbeschränkt.
Dann existiert für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $x_m \in K : f(x_m) \geq m$ also (x_m) eine reelle Folge auf K. Nach Bolzano-Weiertrass (K beschränkt) existiert eine Teilfolge (x_{m_k}) mit $x_{m_k} \to \overline{x}$.
Da K außerdem abgeschlossen ist, gilt $\overline{x} \in K$, wegen Stetigkeit von f auf K (also insbesondere in $\overline{x} \in K$) gilt: $f(x_{m_k}) \to f(\overline{x}) \Rightarrow (f(x_{m_k}))$ ist beschränkt $\Rightarrow (|f(x_{m_k})|)$ ist beschränkt. - Widerspruch zur Wahl der x_m. Also ist $\{f(x) \mid x \in K\}$ beschränkt und es existieren $\xi = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$ und $\eta = \inf\{f(x) \mid x \in K\}$.
Aus der Definition von sup und inf folgt die Existenz von Folgen $(x_n), (y_n) \subset K$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \xi, \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \eta$$

Da K beschänkt ist, existiert Teilfolgen $(x_{n_k}), (y_{n_k})$ von $(x_n), (y_n)$ mit:

$$x_{n_k} \to x^*, y_{n_k} \to x_* \underset{K \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} x^*, x_* \in K.$$

Wegen Stetigkeit von f auf ganz K folgt somit $\xi = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*), \eta = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_*)$.
Damit gilt: $\xi = \max_{x\in K} f(x), \eta = \min_{x\in K} f(x)$ $\square$

Bemerkungen:

- Man kann zeigen, dass K kompakt in $\mathbb{R}$ ist genau dann wenn K die endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle $[a_j, b_j]$ ist.
- Der Satz gilt nicht für (halb-) offene oder unbeschränkte Intervalle (mit $\pm\infty$ Randpunkt)

Beispiele:

i). $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0, 1]$, aber nicht nach oben beschränkt.

ii). $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x$ ist stetig auf $(0, 1)$ und beschränkt (durch 0 und 1), nimmt aber kein Minimum oder Maximum an.

1.10 Definition:

i). $f : D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ den linksseitigen Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ wenn:

$$\text{für alle } \epsilon > 0 \text{ existiert } \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon.$$

Man schreibt dann

$$c = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0^-)$$

Falls $x_0 \in D$ und $f(x_0) = c$ heißt fand der Stelle x_0 linksstetig.

ii). Analog für rechte Seite. Man schreibt

$$d = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0^+)$$

Falls $x_0 \in D$ und $f(x_0) = d$ heißt fand der Stelle x_0 rechtsstetig.

iii). Falls f linksstetig und rechtsstetig mit $c = d$, dann heißt c der Grenzwert von f an der Stelle x_0. Man schreibt $c = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

1.11 Lemma: (Äquivalenz zur Folgedefinition)

i). $a = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ ist äquivalent zu:
$a = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ für alle (x_n) mit $x_n \nearrow x_0$, d.h. Folgen $x_n \to x_0$ mit $x_n < x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii). $b = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ ist äquivalent zu:
$b = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ für alle (x_n) mit $x_n \searrow x_0$, d.h. Folgen $x_n \to x_0$ mit $x_n > x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

iii). $f(x)$ ist stetig an der Stelle $x_0 \in D$ genau dann wenn f sowohl links– wie rechtsseitig stetig an x_0 ist.

1.12 Bemerkung:

Grenzwertsätze gelten analog wie bei Folgen auch für links– und rechtsseitige Grenzwerte von Funktionen, d.h. für $f, g : D \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \nearrow x_0} g(x),$$

vorausgesetzt die rechte Seite ist wohldefiniert.
Entsprechend auch für $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ mit $g(x_0) \neq 0$, aber <u>nicht</u> für $f \circ g$.

1.13 Definition: Lipschitz und Lokal–Lipschitz Stetigkeit

i). $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$, f heißt lipschitz-stetig auf D, falls es $L > 0$ gibt so dass

$$|f(y) - f(z)| \leq L|y - z| \text{ für alle } y, z \in D :$$

ii). $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, x \in D$, f heißt in x lokal lipschitz-stetig, falls es $r > 0, L > 0$ gibt so dass

$$|f(y) - f(z)| \leq L|y - z| \text{ für alle } y, z \in (x - r, x + r) :$$

1.14 Bemerkung:

Lipschitz Stetigkeit impliziert Lokal–Lipschitz Stetigkeit.

1.15 Lemma: Zusammenhang Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ lokal lipschtiz-stetig in $x \in D$, dann ist f in x stetig.

Beweis

$r > 0, L > 0$ nach Definition 1.13 Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $\delta = \min(r, \frac{\epsilon}{L})$. Dann folgt aus $y \in D, |y - x| < \delta \leq r \Rightarrow y \in (x - r, x + r) \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq L|y - x| < L \cdot \delta \leq L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon$ $\square$

1.16 Lemma: Lipschitz-Stetigkeit der Potenzfunktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ist die n-te Potenzfunktion $f(x) = x^n$ in jedem $x \in \mathbb{R}$ lokal lipschtiz-stetig.

Beweis

Fixiere $x \in \mathbb{R}$. Setze $r = 1$. Seien $y, z \in (x - 1, x + 1)$ beliebig.

$$\Rightarrow f(y) - f(z) = y^n - z^n = (y - z)(y^{n-1} + y^{n-2}z + \cdots + yz^{n-2} + z^{n-1})$$
$$\Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq |y - z| \cdot \sum_{k=0}^{n} |y|^k |z|^{n-1-k}$$

Wegen $|y| < |x| + 1, |z| < |x| + 1$ ist $|f(y) - f(z)| \leq |y - z| \cdot \underbrace{n \cdot (|x| + 1)^{n-1}}_{=L}$

Dass heit mit $r = 1, L = n(|x| + 1)^{n-1}$ gilt $|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|$ für alle $y, z \in (x - 1, x + 1)$ $\square$

1.17 Folgerung: Lipschitz-Stetigkeit der Polynomfunktionen

Jede Polynomfunktion $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ ist in jedem $x \in \mathbb{R}$ lokal lipschitz-stetig.

Beweis

$x \in \mathbb{R}, r = 1, y, z \in (x - 1, x + 1) :$

$$|f(y) - f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k||y^k - z^k| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |a_k| k(|x| + 1)^{k-1}}_{=L} |y - z|$$

1.18 Definition: Gleichmäige Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn gilt:

$$\text{für alle } \epsilon > 0 \text{ existiert } \delta > 0 \text{ so dass } \text{ für alle } x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

(Vergleiche einfache Stetigkeit auf D: für alle $\epsilon > 0$ und $x \in D$ existiert $\delta > 0$ so dass für alle $y \in D : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$, d.h. δ darf in Abhängigkeit von x gewählt werden. **)**

Bemerkung:

- Jede auf D gleichmäßig stetige Funktion ist auch stetig auf D.
- Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
- Es gibt stetige Funktionen, die nicht gleichmäßig stetig sind, z.B.: $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$.

Es gilt aber:

1.19 Satz: von Heine-Borel

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig (auf K). Dann ist f gleichmäßig stetig (auf K).

Beweis

Annahme: f nicht gleichmäßig stetig, dass heißt es gibt ein festes ϵ so dass

$$\text{für alle } \delta > 0 \text{ existiert } x_\delta, y_\delta \in K : |x_\delta - y_\delta| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \epsilon$$

Betrachte nun Folge $\delta_n = \frac{1}{n}$ und finde jeweils Paar von Punkten $x_n, y_n \in K$ mit:

$$|x_n - y_n| < \tfrac{1}{n} \quad \text{aber} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

Da K kompakt ist existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x_* \in K$.
Außerdem gilt: $|x_* - y_{n_k}| \leq |x_* - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \to 0$ und somit $y_{n_k} \to x_*$.
Wegen Stetigkeit von f folgt:

$$f(x_{n_k}) \to f(x_*), f(y_{n_k}) \to f(x_*) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \overset{da\ |\cdot| st.\ Fkt.}{=} |f(x_*) - f(x_*)| = 0$$

Dies steht im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$ $\square$

Kapitel IV

Differentation

1 Definition und Grundeigenschaften

1.1 Definition: Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a, b)$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

im Sinne der Definition 3.10 aus dem vorherigen Kapitel existiert. Dann heißt $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ die Ableitung von f an der Stelle x_0.
Wenn f differenzierbar an allen $x_0 \in (a, b)$ ist, dann bezeichnet man f' als die Ableitungsfunktion $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ oder einfach die Ableitung von f.

Man sagt dann auch: Der auf $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ stetige Differenzenquotient $G(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hat an der Stelle x_0 eine *hebbare Unstetigkeit*, so dass er durch die Setzung $G(x_0) = f'(x_0)$ stetig wird. Goemetrisch gibt dieser Grenzwert die Tangentensteigung an. Wenn die unabhänige Variable $x = t$ die Zeit repräsentiert, dann ist $f'(t_0)$ die Änderungsgeschwindigkeit von $f(t)$ zum Zeitpunkt t_0.

Beispiele:

i). $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0} = a\frac{x-x_0}{x-x_0} = a$

ii). Für $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ mit $h = x - x_0 \to 0$ gilt:

$$\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \frac{x_0^n + nhx_0^{n-1} + \ldots - x_0^n}{h} = \frac{nhx_0^{n-1} + \ldots}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to h} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} = \lim_{h \to 0} \Big(\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k}}_{\to 0} \Big)$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx_0^{n-1}$$

iii). $f(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tfrac{1}{h}(\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)) &= \tfrac{1}{h}(\cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)) \\
\Rightarrow \lim_{h \to 0} \cos(x_0)\tfrac{(\cos(h)-1)}{h} - \sin(x_0)\tfrac{\sin(h)}{h} &= \cos(x_0) \lim_{h \to 0} \tfrac{\cos(h)-1}{h} + \sin(x_0) \lim_{h \to 0} \tfrac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x_0) \cdot 0 - \sin(x_0) \cdot 1 = -\sin(x_0) \\
&\Rightarrow \tfrac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)
\end{aligned}$$

Alternative Schreibweisen für die Ableitung:
$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x) \mid_{x=x_0} = \frac{df}{dx} \mid_{x=x_0} = \frac{dy}{dx} \mid_{x=x_0}$, falls $y = f(x)$.

1.2 Lemma:

Für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gelten die folgende Implikationen:

i). f differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a, b) \Rightarrow f$ stetig an der Stelle x_0.

ii). f stetig differenzierbar auf (a, b) , d.h. $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, $\Rightarrow f$ lokal–Lipschitz stetig auf (a, b).

Beweis

Übung.

1.3 Definition: Links- und Rechtsdifferenzierbarkeit

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt an $x_0 \in (a, b)$ links- und/oder rechtsdifferenzierbar, falls wiederum im Sinne von Definition 3.10 folgende Grenzwerte existiert:

$$f'_-(x) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{beziehungsweise} \quad f'_+(x) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beispiel: $f(x) = |x| \Rightarrow f'_-(0) = -1$ und $f'_+(0) = 1$.

1.4 Lemma: Zusammenhang von Richtungsdifferenzierbarkeit und Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar genau dann wenn die Richtungsableitungen $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ existieren und den gleichen Wert haben.

Beweis

Es gilt jeweils für gegebenes $\epsilon > 0$ und geeignetes $\delta > 0$, dass:

i). bei Differenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'(x)| < \epsilon$ für $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$

ii). bei Linksdifferenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'_-(x)| < \epsilon$ für $h \in (-\delta, 0)$

iii). bei Rechtsdifferenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'_+(x)| < \epsilon$ für $h \in (0, \delta)$

Offensichtlich folgt aus i) sowohl ii) als auch iii) mit $f'_-(x) = f'(x) = f'_+(x)$. Umgekehrt implizieren ii) und iii) mit $f'_-(x) = f'_+(x)$ die Aussage i) mit $f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$.

1.5 Satz: Ableitungen von Summen, Produkten, Quotienten

Falls $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ und an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, so sind auch folgende Kombinationen auch differenzierbar mit den angegebenen Ableitungswerten:

i). **Linearität** (Additivität und Homogenität der Ableitung):
$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \ni \beta \Rightarrow h'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

ii). **Produktregel:** $h(x) = f(x)g(x) \Rightarrow h'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$

iii). **Quotientenregel:** $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow h'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis

i). offensichtlich beim Hinschreiben

ii).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left[\tfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\tfrac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\right]\\ &= \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\left[\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]+\lim_{x\to x_0}\left[f(x_0)\tfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\ &= \lim_{x\to x_0} g(x)\lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\tfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

iii).

$$\lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)/g(x)-f(x_0)/g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x_0)g(x)}=\lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x_0)g(x)}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\tfrac{1}{g(x)}\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\tfrac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\tfrac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}=\tfrac{f'(x_0)}{g(x_0)}-\tfrac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}=\tfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beispiel: Die schon bewiesene Aussage $\frac{d}{dx}x^n = x^{n-1}$ für $n \geq 0$ lässt sich mit der Produktregel durch Induktion überprüfen:

$$\tfrac{d}{dx}(x^n)=\tfrac{d}{dx}(x\cdot x^{n-1})=1\cdot x^{n-1}+x\cdot\tfrac{d}{dx}x^{n-1}=x^{n-1}+x(n-1)x^{n-2}\Leftarrow \text{ Induktionsannahme}$$

Die Qoutientenregel ergibt für $n < 0$:

$$\tfrac{d}{dx}x^n=\tfrac{d}{dx}\tfrac{1}{x^{-n}}=\tfrac{0\cdot x^{-n}-(-n)x^{-n-1}\cdot 1}{(x^{-n})^2}=\tfrac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}}=nx^{-n-1+2n}=nx^{n-1}$$

Frage: Was passiert bei Hintereinanderausführung: $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \ldots \xrightarrow{h}$ (Komposition)
$x \in (a,b) \subset \mathbb{R}, y = f(x), z = g(y) \Rightarrow h(x) = g(f(x))$

1.6 Satz: Kettenregel

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar und g auf der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ auf der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\tfrac{dh(x)}{dx}\,|_{x_0}=h'(x_0)=\tfrac{dz}{dx}\,|_{x=x_0}=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Eselsbrücke nach Leibniznotation: $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$

Beweis

Betrachte die Darstellung:

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=G(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad\text{wobei } G(y)=\begin{cases}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{falls } y\neq y_0\\ g'(y_0) & \text{falls } y=y_0\end{cases}$$

Differenzierbarkeit von g an y_0 ist äquivalent zur Stetigkeit von $G(y)$ an $y = y_0$. Also folgt aus den Grenzwertsätzen, dass:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}G(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}G(f(x))\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{y\to y_0}G(y)f'(x_0)\\&=G(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)\ \square\end{aligned}$$

Beispiel: $\sin(x^n) = g(f(x))$ mit $f(x) = x^n, g(y) = \sin(y), f'(x) = nx^{m-1}, g'(y) = \cos(y)$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\underbrace{\cos(x^n)}_{\text{äußere Ableitung}}\;nx^{n-1}$$

1.7 Definition: Minima und Maxima

Für $f : D \to \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in D$ ein lokales Minimum beziehungsweise lokales Maximum, wenn gilt: es existiert ein

$$\delta > 0 \text{ so dass für } x \in B_\delta(x_0) := \{x \in D : |x - x_0| < \delta\} \text{ gilt: } f(x) \geq f(x_0) \text{ bzw. } f(x) \leq f(x_0)$$

Falls Aussage für beliebiges δ gilt, heißt x_0 globales Minimum bzw. Maximum von f auf D.

Beispiel: $f(x) = \frac{(1+\cos(x))}{(1+x^2)}$ auf $D = \mathbb{R}$ alle lokalen Minima sind globale Minima mit Minimalwert 0. Nur das lokale Maximum $f(0) = 2$ ist auch globales Maximum.

1.8 Satz: Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung (1. Ableitung)

Sei f auf $[a, b]$ stetig, in (a, b) differenzierbar und an $x = a$ rechts und an $x = b$ links differenzierbar. Dann gilt für jedes lokale Minimum (bzw. Maximum) $x_0 \in [a, b]$ entweder:

i). $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$

ii). oder $a = x_0$ und $f'_+(x_0) \geq 0$ (bzw. $f'_+(x_0) \leq 0$)

iii). oder $x_0 = b$ und $f'_-(x_0) \leq 0$ (bzw. $f'_+(x_0) \geq 0$)

Beweis

Falls $x_0 \leq b$ folgt aus Minimalität, dass $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Dies beweist iii).
Entsprechend für $x_0 \geq a$ gilt dass $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Dies beweist ii).
Für alle $x_0 \in (a, b)$ gilt $0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0, \Rightarrow f'(x_0) = 0$. $\square$

1.9 Satz: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Falls f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b), dann existiert mindestens ein $x \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \text{ bzw } f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$$

Beweis

Betrachte die stetige Funktion $\phi(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ so dass $\phi(a) = 0 = \phi(b)$ und $\phi \in (a, b)$ diffbar. Wegen Stetigkeit nimmt ϕ nach Weierstrass sowohl ein Minimum wie auch ein Maximum an für $x \in [a, b]$. Falls Maximalwert gleich Minimalwert muss gelten $\phi(x) = 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow \phi'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Ansonsten ist entweder Maximalwert oder Minimalwert ungleich 0 und wird somit an $x_* \in (a, b)$ angenommen:

$$\Rightarrow \phi'(x) = 0 \text{ nach Satz } \textbf{??}\text{atsbedingungenOrdnungSatz:OptimalitätsbedingungenOrdnung} \Leftrightarrow 0 = \phi'(x) = f'(x) -$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, [a, b] = [0, 1]$
$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$ Zwischenwertsatz gilt für x mit $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$
Bemerkenswert: f ist am linken Rand noch nicht einmal richtungsdifferenzierbar, da Tangente vertikal. Als Spezialfall ergibt sich folgendes Resultat.

1.10 Korollar: Satz von Rolle

Sei $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und f differenzierbar auf (a, b). Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.
Eine sehr nützliche Verallgemeinerung ist das folgende Ergebnis.

1.11 Satz: verallgemeinerte Mittelwertsatz

Seien f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis

Setze $\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ wobei sich $g(b) - g(a) = g'(\eta) \neq 0$ nach einfachem Mittelwertsatz. Es gilt: ϕ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b), sowie $\phi(a) = 0 = \phi(b)$
Satz von Rolle liefert Existenz eines $\xi \in (a, b)$ so dass $0 = \phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$ wie behauptet. □

1.12 Satz: Charakterisierung von (strenger) Monotonie durch Ableitung

Eine auf (a, b) differenzierbare Funktion f ist streng monoton steigend beziehungsweise streng monoton fallend, wenn

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \text{ bzw } f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in (a, b)$$

Sie kann nur monoton sein, wenn diese Bedingungen schwach erfüllt sind, dass heißt:

$$\inf_{a<x<b}(f'(x)) \geq 0 \text{ oder } \sup_{a<x<b}(f'(x)) \leq 0$$

Beweis

Es gilt für $a \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq b$ nach Mittelwertsatz $f(\tilde{b}) - f(\tilde{a}) = (\tilde{b} - \tilde{a})f'(x)$ für $x \in (\tilde{a}, \tilde{b})$. Es folgt:

$$f(\tilde{b}) - f(\tilde{a}) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{ strenges Wachstum folgt aus } f'(x) > 0$$

Zum Beweis der Notwendigkeit von $\inf(f'(x)) \geq 0$ für schwach monotones Steigen nehme an, dass $f'(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \text{ für alle } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

nicht monoton wachsend - Widerspruch. □

1.13 Satz: Lipschitzstetigekeit differenzierbarer Funktionen

Sei f auf (a, b) differenzierbar. Wenn $L_0 := \sup(|f'(x)| : a < x < b) < \infty$ Dann ist f auf $[a, b]$ Lipschitzstetig.

Beweis

Nach dem Mittelwertsatz gilt: $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| = |f'(z)| \leq L_0$, für $x < z < y$.

1.14 Satz: Existenz von Umkehrfunktion streng monotoner Funktionen

Falls f auf $[a, b]$ stetig und streng monoton steigend, existiert eine stetige Umkehrfunktion f^{-1} : $[f(a), f(b)] \to [a, b] \subset \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{für alle } x \in [a, b], \text{ und} \\ f(f^{-1}(y)) &= y \quad \text{für alle } y \in [f(a), f(b)]. \end{aligned}$$

Beweis

Die vorrausgesetzte Monotonie und der Zwischenwertsatz guarantieren dass jeder Wert $y \in [f(a), f(b)]$ genau einmal angenommen wird von $f(x)$. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist also mengentheoretisch eindeutig definiert. Zu beweisen bleibt nur noch noch ihre Stetigkeit. Wäre diese Eigenschaft nicht vorhanden so gäbe es eine konvergente Folge $[f(a), f(b)] \ni y_n y_* = \lim_n y_n \in [f(a), f(b)]$ so dass die entsprechenden Urbilder $x_n = f^{-1}(y_n)$ nicht gegen $x_* = f^{-1}(y_*)$ konvergieren. Das bedeutet nach Bolzano Weierstrass, dass eine Teilfolge x_{n_k} einen anderen Grenzwert $\tilde{x}_* \in [a, b]$ hat. Wegen der vorrausgesetzten Stetigkeit von f gilt aber $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}_*) = \lim y_{n_k} = \lim y_n = y_* = f(x_*)$. Wegen der Injektivität von f muss also doch gelten $\tilde{x}_* = x_*$ im Widerspruch zur Annahme dass $\tilde{x}_* \neq x_*$ $\square$.

1.15 Satz: Existenz und Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen

Falls die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ für alle $x \in (a, b)$ existiert und positiv ist, so besitzt $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ eine Inverse $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$. Diese ist für alle $y_0 \in (f(a), f(b))$ differenzierbar und es gilt:

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]' := \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \mid_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

wobei $y_0 = f(x_0)$ beziehungsweise $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Die Aussage gilt entsprechend wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Beweis

Strenge Monotonie folgt aus der Vorzeichenbeschränkung der Ableitung. Dadurch ist die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion garantiert. Außerdem gilt:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

da $f'(x_0) \neq 0$ nach Vorraussetzung.

1.16 Korollar: besondere Ableitungen

i). $\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}$

ii). $\frac{d}{dx} x^y = y x^{y-1}$ für $0 < x \in \mathbb{R}$

iii). $\frac{d}{dx} y^x = \log(y) y^x$ für $0 < y \in \mathbb{R}$

Beweis

Nach vorherigem Satz folgt aus $\log(y) = f^{-1}(y)$:

i). Umkehrfunktion von $f(x) = \exp(x)$, somit: $\frac{d}{dy} \log(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}$

ii). $\frac{d}{dx} x^y = \frac{d}{dx} \exp(y \log(x)) = \exp(y \log(x)) \left(\frac{y}{x}\right) = x^y \frac{y}{x} = y x^{y-1}$

iii). $\frac{d}{dx} \exp(x \log(y)) = \log(y) \exp(x \log(y)) = \log(y) y^x$ $\square$

1.17 Satz: Regel von l'Hôpital

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für ein $x_0 \in (a,b)$ gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x_0 \neq x \in (a,b)$ sowie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Falls nun der eigentliche ($\in \mathbb{R}$) oder uneigentliche ($\in \infty$) Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte sind gleich.

Sind f, g an x_0 stetig differenzierbar mit $g'(x_0) \neq 0$, so folgt, dass $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Beweis

f, g stetig an x_0. Sei $\delta > 0$ so dass $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a,b)$. Nach verallgemeinerte Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x_0, x_0 + \delta)$ so, dass

$$\frac{f(x_0 + \delta)}{g(x_0 + \delta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ist. $\delta \to 0$ impliziert $\xi \to x_0$. Daraus folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta)}{g(x_0+\delta)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

Beispiele

i). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

ii). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

iii). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{1} = 0$

iv). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x} =_{\text{wende l'Hôpital erneut an}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{2} = \dfrac{1}{2}.$