HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

16.02.2013

PROF. A. GRIEWANK PH.D.; DR. A. HOFFKAMP;
DIPL.MATH. T.BOSSE; DIPL.MATH. L. JANSEN
DR. TH. ROHWEDDER

ERSTE KLAUSUR ZUR VORLESUNG
ANALYSIS I (WS 12/13)

Geben Sie bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an. Benennen Sie insbesondere explizit alle Sätze aus der Vorlesung, die Sie verwenden!

Für die Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
Neben Stiften, Papier und einem mit der Hand beschriebenen DIN-A4-Zettel sind keine weiteren Hilfsmittel erlaubt. Insbesondere sind Handys und Taschenrechner NICHT zugelassen.

Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Die Klausur ist mit **26 Punkten** bestanden.

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Sie dürfen im Beweis benutzen, dass die Wurzelfunktion eine streng monoton wachsende und stetige Funktion ist.

Aufgabe 2: (4+8 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$$

b) Bestimmen Sie **alle** $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{3^k(1+\frac{1}{k})^k}$$

konvergiert. Hierbei dürfen Sie benutzen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ konvergiert.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Wählen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 - ax + b & \text{für } x \leq -1 \\ (a+b)x & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ x^2 + ax - b & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist und beweisen Sie dies.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

In den Übungen wurde gezeigt, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

a) Geben Sie die Ableitungsfunktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ explizit an.

b) Ist f' stetig (also f stetig differenzierbar)?

c) Ist f (global) Lipschitz-stetig?

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Beweisen Sie, per Induktion oder mit Hilfe der Leibniz-Formel, dass die n-te Ableitung $f^{(n)}$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{x-1}$ durch die Formel

$$f^{(n)}(x) \;=\; (x+n)e^{x-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

gegeben ist.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die gerade ist, d.h. $f(x) = f(-x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f'(0) = 0$ gilt.

Aufgabe 7: (**Zusatzaufgabe**, 8 Punkte)

Berechnen Sie für die Funktion f aus Aufgabe 5 im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ das Taylorpolynom vierten Grades. Bestimmen Sie hiermit einen Näherungswert für den Wert von f an der Stelle $x = 2$ und vergleichen Sie diesen mit dem auf 5 Stellen hinter dem Komma gerundeten Wert $f(2) \approx 5.43656$.