Aufgabe 1.1: (4 Punkte)

Der Planet Og wird von zwei verschiedenen Rassen bewohnt - dem grünen und dem roten Volk. Desweiteren sind die Leute, die auf der nördlichen Halbkugel geboren wurden von denen auf der südlichen Halbkugel sehr verschieden. Das Komische an dem Planeten ist, dass die grünen Nordler immer die Wahrheit sagen und die roten Nordler immer lügen, während die grünen Südler lügen und die roten Südler die Wahrheit sagen.

Rätsel 1: Zwei Bewohner von Og, A und B, hatten nicht dieselbe Hautfarbe und stammten von verschiedenen Halbkugeln. Sie machten folgende Aussagen:

A: 'B ist aus dem Norden.'

B: 'A ist rot.'

Welche Farbe haben A und B, und woher stammen sie?

Rätsel 2: Ein weiteres Duo zwei verschiedenfarbige Bewohner von Og, A und B, machten die folgenden Aussagen:

A: 'B ist ein Nordler.'

B: 'Wir sind beide Nordler.'

Was sind A und B?

Lösung 1.1:

Rätsel 1: Die Lösung der Aufgabe geschieht per Fallunterscheidung mittels der zwei Fälle 'A sagt die Wahrheit' und 'A lügt':

Fall 1: A sagt die Wahrheit, dann ist seine Aussage wahr und 'B stammt aus dem Norden'. Nach Vorraussetzung (A und B kommen von verschiedenen Planetenhälften) kommt A somit aus dem Süden und ist somit rot (nur rote Südler sagen die Wahrheit). Aufgrund der Vorraussetzung 'A und B haben verschiedene Hautfarben' folgt schliesslich, dass B grüner Nordler ist.

Fall 2: Falls A lügt, so ist die Aussage 'B stammt aus dem Norden' falsch und somit stammt B aus dem Süden. Nach Vorraussetzung (A und B kommen von verschiedenen Planetenhälften) kommt A also aus dem Norden und ist ein roter Nordler (nur rote Nordler lügen). Nach der Vorraussetzung der unterschiedlicher Hautfarbe von A und B ist B also grüner Südler. Somit ist die Aussage von 'B' Aussage 'A ist rot' falsch (grüne Südler lügen). D.h. A ist grün, was aber im Widerspruch zur unterschiedlichen Hautfarbe steht.

Also kann nur 'A ist roter Südler' und 'B ist grüner Nordler' gelten.

Rätsel 2: Die Lösung der Aufgabe kann durch eine Fallunterscheidung der folgenden vier Fälle und einer Zurückführung auf einen Widerspruch (falls möglich) gefunden werden:
'A ist grüner Nordler', 'A ist roter Nordler', 'A ist grüner Südler' und 'A ist grüner Südler'.
Die einzige erfüllbare Aussage, welche nicht zu einem Widerspruch führt, ist die Lösung:

A ist roter Nordler und B ist grüner Südler.

Aufgabe 1.2: (4 Punkte)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Lösung 1.2:

Definiere die Aussage

$$A(n) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, z.B. $n = 1$:

$$A(1) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage $A(m)$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$$

gelte für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$.

Induktionsschritt $(n \to n+1)$**:** Zeige, dass dann auch die Aussage $A(n+1)$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n+1(n+1+1)(n+1+2)}{3}$$

gilt. Beweis durch Zurückführung auf die Induktionsvorraussetzung mit $m = n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) && \text{Rechenregel für Summen} \\ &\overset{\text{I.-V.}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) && \text{nach IV. für } m = n \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) && \text{Erweitern + Zusammenfassen} \end{aligned}$$

Somit ist die ist die Aussage $A(n+1)$ nachgewiesen.

Damit schliesst man, dass die Aussage

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

wahr ist.

Aufgabe 1.3: (4 Punkte)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{2n}{3} + \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^4}{4}$ eine ganze Zahl.

Lösung 1.3:

Zunächst bemerken wir (durch erweitern auf den ggT), dass die Aussage

$$\frac{2n}{3} + \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^4}{4} \in \mathbb{Z}$$

äquivalent zu der Aussage

$$12 \,|\, (8n + 3n^2 - 2n^3 + 3n^4)$$

ist, d.h. 12 ist ein Teiler des Ausdrucks $(8n+3n^2-2n^3+3n^4)$. Wir zeigen nun durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass die Aussage $A(n)$

$$A(n) \Longleftrightarrow 12 \,|\, (8n + 3n^2 - 2n^3 + 3n^4)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, z.B. $n = 1$. Diese gilt offenbar, da

$$A(1) \Longleftrightarrow 12 \,|\, (8 + 3 - 2 + 3) \Longleftrightarrow 12 \,|\, 12$$

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage $A(m)$, d.h.

$$12 \,|\, (8m + 3m^2 - 2m^3 + 3m^4)$$

gelte für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$.

Induktionsschritt: $(n \to n+1)$ Zeige, dass dann auch die Aussage $A(n+1)$, d.h.

$$12 \,|\, (8(n+1) + 3(n+1)^2 - 2(n+1)^3 + 3(n+1)^4)$$

gilt. Durch elementare Umformungen finden wir:

$$\begin{aligned}
&12 \,|\, \big(8(n+1) + 3(n+1)^2 - 2(n+1)^3 + 3(n+1)^4\big) \\
\Longleftrightarrow &12 \,|\, \big(8n + 8 + 3n^2 + 6n + 3 - 2n^3 - 6n^2 - 6n - 2 + 3n^4 + 12n^3 + 18n^2 + 12n + 3\big) \\
\Longleftrightarrow &12 \,|\, \big((8n + 3n^2 - 2n^3 + 3n^4) + (12n^3 + 12n^2 + 12n + 12)\big)
\end{aligned}$$

In anderen Worten

$$\big(8(n+1) + 3(n+1)^2 - 2(n+1)^3 + 3(n+1)^4\big)$$

ist genau dann durch 12 teilbar, wenn

$$\big(8n + 3n^2 - 2n^3 + 3n^4\big) \text{ und } \big(12n^3 + 12n^2 + 12n + 12\big)$$

durch 12 teilbar sind. Die zweite Teilbarkeitsbedingung ist offensichtlich erfüllt und die erste folgt nach Induktionsvoraussetzung für $m = n$. Also gilt die Behauptung $A(n+1)$.

Damit schließt man:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad A(n)$$

und somit gilt aufgrund der Äquivalenz die ursprüngliche Aussage.

Aufgabe 1.4: (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, (ii) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Zeigen Sie, dass sich auch bei der falschen Aussage der Schluss von n auf $n+1$ durchführen lässt. Begründen Sie, warum die Aussage dennoch falsch ist.

Lösung 1.4:

Im Folgenden betrachten wir zunächst Aussage (ii) und weisen mittels Induktion nach, dass diese Aussage wahr ist. Im zweiten Schritt zeigen wir mittels eines indirekten Beweises und eines Widerspruchs, dass die zweite Aussage nicht gelten kann, obwohl sich der Induktionsschritt durchführen (Siehe 3. Schritt) lässt.

Schritt 1: Definiere Aussage

$$A(n) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, z.B. $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 = 2! - 1$$

Dh. die Aussage ist für $n = 1$ erfüllt.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage $A(m)$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{m} k \cdot k! = (m+1)! - 1$$

gelte für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$.

Induktionsschritt $(n \to n+1)$**:** Zeige, dass dann auch die Aussage $A(n+1)$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{(n+1)} k \cdot k! = ((n+1)+1)! - 1$$

gilt. Beweis durch Zurückführung auf die Induktionsvorraussetzung mit $m = n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! && \text{Rechenregel für Summen} \\ &\overset{\text{I.-V.}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! && \text{nach IV. für } m = n \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1 && \text{nach Def. der Fakultät} \end{aligned}$$

Damit schliesst man, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in N$ wahr ist, d.h. es gilt:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 = 2! - 1$.

Schritt 2: Angenommen, es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Schritt 1 wissen wir allerdings, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$, beliebig so folgt aus diesen beiden Aussagen, dass

$$(n+1)! + 1 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Aus der obigen Gleichheit

$$(n+1)! + 1 = (n+1)! - 1$$

folgt aber nun der Widerspruch $1 = -1$. Somit kann die Annahme nicht gelten, d.h. die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist falsch. In der Tat haben wir sogar bewiesen, dass die Aussage für kein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Schritt 3: Dennoch gilt unter Annahme der falschen Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! + 1 \text{ gelte für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq m \leq n,$$

dass sich der Induktionsschritt $(n \to n+1)$ nachweisen lässt, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! && \text{Summenregeln} \\
&= (n+1)! + 1 + (n+1)(n+1)! && \text{nach falscher IV} \\
&= (n+2)(n+1)! + 1 = (n+2)! + 1 && \text{Def. Fakultät}
\end{aligned}$$