Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen; S. Eulert

Lösungsvorschlag zu den Übungsaufgaben
ANALYSIS I (WS 12/13) - Serie 7

Lösung 7.1:

Wir wollen zeigen, daß für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q \in [0,1) \subset \mathbb{R}$ die folgende Implikation

$$|a_{n+1} - a_n| < q^n \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge}$$

gilt, wobei (a_n) eine Cauchyfolge ist, wenn sie folgende Beziehung erfüllt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall m, n > n(\varepsilon) : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Voraussetzung: $|a_{n+1} - a_n| < q^n$ und $q \in [0,1)$
Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall m, n > n(\varepsilon) : |a_m - a_n| < \varepsilon$
Beweis:
Zunächst gilt ganz allgemein mit Hilfe der *Dreiecksungleichung*

$$|a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| < q^{n+1} + q^n$$

Sei nun oBdA $m < n$, dann gilt

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= \left|\sum_{j=m}^{n-1} a_j - a_{j+1}\right| \\
&\leq \sum_{j=m}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| \leq \sum_{j=n(\varepsilon)}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| \\
&< \sum_{j=n(\varepsilon)}^{n-1} q^j \text{ (nach Voraussetzung)} \\
&< \sum_{j=n(\varepsilon)}^{\infty} q^j = q^{n(\varepsilon)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q^j = q^{n(\varepsilon)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{=:c \text{ konstant}} \longrightarrow_{n(\varepsilon)\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Wobei wir die letzten Gleichheiten über eine Indexverschiebung und den Grenzwert der geometrischen Reihe gewonnen haben.
Insbesondere gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon)$ sodass $q^{n(\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon}{c}$ und da diese Aussage für beliebige $n, m > n(\varepsilon)$ gilt, folgt die Behauptung und wir sind fertig.

Lösung 7.2:

Aus Erfahrung wissen wir, daß ein Gegenstand auf den Boden fallen gelassend, nach endlicher Zeit auch schließlich dort liegen bleibt. Dabei legt er naturgemäß auch nur endlich viel Wegstrecke zurück.

In dieser Aufgabe vernachlässigen wir Reibung und andere weitere Effekte und modellieren den Energieverlust mit einem Faktor $0 < r < 1$.
Damit dieses Modell überhaupt vernüftig das Experiment wiedergeben kann, muß die insgesamt zurückgelegte Wegstrecke endlich (auch in nicht endlicher Zeit) sein, daß wollen wir jetzt untersuchen:

- der Ball fällt aus der Anfangshöhe H und landet: Wegstrecke $(+H)$
- springt vom Boden $r \cdot H$ ab und dann wieder auf den Boden: Wegstrecke $(+2r \cdot H)$
- springt wieder auf Höhe $r^2 \cdot H$ und landet: Wegstrecke $(+2r^2 \cdot H)$

  $\vdots$

Insgesamt haben wir also nach $(n+1)$-Landungen auf dem Boden folgende Wegstrecke $s^r(n)$ zurückgeleget

$$s^r(n) = H + \sum_{k=1}^{n} 2r^k \cdot H = H + 2H \sum_{k=1}^{n} r^k$$

Jetzt interessieren wir uns für den Grenzfall $n \to \infty$ und nutzen wieder die geometrische Reihe $(r < 0)$

$$\lim_{n\to\infty} s^r(n) = H + 2H \sum_{k=1}^{\infty} r^k = H + 2H \left(\frac{r}{1-r}\right) = H \left(\frac{1+r}{1-r}\right) < \infty$$

Damit haben wir die Wegstrecke $s^r(n) < \infty$ berechnet und unser Modell ist zumidest in diesem Punkt vernüftig aufgestellt.

<u>Lösung 7.3:</u>

Wir wollen testen, ob für

$$s(k) := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

tatsächlich

$$\lim_{k\to\infty} s(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = c < \infty$$

gilt. Dafür betrachten wir zunächst die folgende Umformung

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n(n+1)} - \frac{b}{(n+1)(n+2)} = \frac{a(n+1) - b \cdot n}{n(n+1)(n+2)}$$

was zu

$$a = b = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n(n+1)} - \frac{1/2}{(n+1)(n+2)}$$

führt. Genau das nutzen wir jetzt und erhalten als neue Darstellung für $s(k)$

$$s(k) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1/2}{n(n+1)} - \frac{1/2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Dies ist eine sogenannte *Teleskopsumme*, alle Summanden zwischen dem ersten und letzten kürzen sich gegenseitig und somit bleibt letztlich

$$s(k) = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1/2}{n(n+1)} - \frac{1/2}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1/2}{1(1+1)} - \frac{1/2}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

Jetzt können wir auch sofort den Grenzfall $\{ \lim_{k \to \infty} \}$ betrachten und erhalten

$$\lim_{k \to \infty} s(k) = \lim_{k \to \infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \right] \overset{!}{=} \frac{1}{4} = c$$

Als nächstes wollen wir unser Vorgehen auf einen Ausdruck wie folgt mit $l \in \mathbb{N}^{\geq 3}$

$$s(k) := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+l)}$$

verallgemeinern. Wir nutzen erneut die *Teleskopsumme* und erhalten zunächst

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+l)} = \frac{1/l}{n(n+1)(n+2)\dots(n+l-1)} - \frac{1/l}{(n+1)(n+2)\dots(n+l)}$$

was direkt zu

$$s(k) = \frac{1/l}{1(1+1)(1+2)\dots(1+l-1)} - \frac{1/l}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{l!} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} \right)$$

führt. Insgesamt erhalten wir dann

$$\lim_{k \to \infty} s(k) = \lim_{k \to \infty} \left[\frac{1}{l} \left(\frac{1}{l!} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} \right) \right] \overset{!}{=} \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{l!} = c < \infty$$

und sind fertig.

Lösung 7.4:

a) Wir wollen entscheiden, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n - a) = c < \infty$$

Diese Aussage ist falsch, es gilt zwar

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n - a) = c < \infty$$

denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n - a) = c \Rightarrow c_n := (-1)^n (a_n - a) \text{ ist eine Nullfolge}$$

Somit muß aber auch sofort gelten

$$c_n{}^* := (a_n - a) \text{ ist eine Nullfolge und es gilt nach Definition } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

und wir sind fertig! Für die Rückrichtung

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n - a) = c < \infty$$

gibt es allerdings ein Gegenbeispiel, dazu betrachten wir die konvergente Nullfolge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (-1)^n(\frac{1}{n}) \Rightarrow c_k := \sum_{n=1}^{k}(-1)^n(a_n - a) = \sum_{n=1}^{k}(-1)^{2n}(\frac{1}{n})$$

wobei dies aber genau die harmonische Reihe ist, die, wie wir wissen, divergiert und somit c_k über alle Grenzen wächst.

b) Die Aussage

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = c < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n \cdot b_n| = d < \infty$$

ist allerdings wahr, denn da b_n beschränkt ist gilt

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ |b_n| < b \text{ für ein positives b} \in \mathbb{R}\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n \cdot b_n| &= \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| \cdot |b_n|)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| \cdot b) = b \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|)\\ &= b \cdot c < \infty\end{aligned}$$

und damit haben wir die Konvergenz gezeigt.

c) Die Aussage

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 = d < \infty$$

ist wieder falsch, denn ein Gegenbeispiel mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := -\frac{1}{\sqrt{n}}$ liefert sofort die divergente harmonische Reihe.

d) Auch die letzte Aussage

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 = c < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = d < \infty$$

ist falsch, denn ein Gegenbeispiel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \frac{1}{\sqrt{n}}$ liefert wieder die harmonische Reihe, wobei hier allerdings

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt, was wir hier allerdings nicht zeigen wollen. Damit sind wie fertig.