Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen; S. Eulert

Lösungsvorschlag zu den Übungsaufgaben
ANALYSIS I (WS 12/13) - Serie 8

Lösung 8.1:

An Stelle der exakten Position der Schnecke auf dem Gummiband und der damit insgesamt zurückgelegten Wegstrecke modellieren wir den relativ - zur Länge des Bandes - zurückgelegten Weg. Wir kommen dann auf folgende Überlegung: "Am Anfang legt die Schnecke 10cm von 100cm zurück (10%), nach der Verlängerung 10cm von 200cm zurück (5%),..., so daß wir insgesamt folgende Folge erhalten, wobei n für die Anzahl der Stunden/Verlängerungen steht

$$p_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10 \cdot k} \text{ in Prozent des zurückgelegten Weges, gestoppt vor der Verlängerung}$$

Die Schnecke erreicht das Ende des Gummibandes, wenn

$$p_n \geq 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 10.$$

Da die harmonische Reihe insbesondere unbeschränkt ist und also über jede Schranke wächst, gilt dies ab einem bestimmten $n_0 \in \mathbb{N}$, wir können dies mit einem geeigneten Programm (Matlab, Mathematica, Maple etc.) auch schnell bestimmen und erhalten als Lösung

$$n = 12367$$

Nach 12367 Stunden hat die Schnecke das Ende des Gummibandes endlich erreicht.

Lösung 8.2:

In dieser Aufgabe wollen wir die Konvergenz von drei verschiedenen Reihen untersuchen:

a) Existiert der Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} = a < \infty \text{ ?}$$

Wir nutzen das Quotientenkriterium und finden

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{(k+1)! \cdot k^k}{k! \cdot (k+1)^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{e} < 1$$

Damit konvergiert die Reihe.

b) In diesem Fall existiert der Grenzwert nicht, da wir die harmonische Reihe als divergente Minorante finden können, denn es gilt $\forall k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$

$$\frac{1}{k} < \frac{k+4}{k^2 - 3k + 1} \Longleftrightarrow k^2 - 3k + 1 < k^2 + 4k \Longleftrightarrow 1 < 7k.$$

Somit divergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1} = b < \infty \, .$$

c) Bei der Folge

$$c_k := (-1)^k {c_k}^* \text{ mit } {c_k}^* := \frac{(k+1)^{k-1}}{k^k}$$

handelt es sich um eine alternierende Folge, genauer sogar um eine Nullfolge, da

$$\lim_{k\to\infty} {c_k}^* = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(k+1)^{k-1}}{k^k}\right] = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right] = 0 \cdot e = 0$$

Die Folge ${c_k}^*$ konvergiert sogar monoton gegen 0, denn aus der Ungleichung

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < k^2 + 2k$$

folgt nach ein paar elementaren Umformungen

$${c_{k+1}}^* = \frac{(k+2)^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k^k} < {c_k}^*$$

Somit sind die Vorraussetzungen für das das Leibniz-Kriterium erfüllt und es folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^{k-1}}{k^k} = c < \infty.$$

Lösung 8.3:

Es seien die zwei Partialsummenfolgen

$${a_n}^* := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ sowie } {b_n}^* := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

mit den beiden positiven reellen Folgen a_k und b_k gegeben, wobei folgende Beziehung gelten soll

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so daß } \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Wir zeigen nun, daß im Falle der Konvergenz der ${b_n}^*$ auch die Konvergenz der ${a_n}^*$ folgt, dazu schauen wir uns die obere Beziehung genauer an.
Wir wissen also das für beliebig aber festes n_0 - welches nach Voraussetzung existiert - gilt

$$\forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_{n+1}$$

und weiter gilt damit

$$a_{n+2} \leq a_{n+1} \cdot \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot b_{n+2} \leq \frac{a_n}{b_n} \cdot b_{n+1} \cdot \frac{1}{b_{n+1}} \cdot b_{n+2} = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_{n+2}$$

Diese Beziehung läßt sich jetzt induktiv für alle $n \geq n_0$ formulieren, insbesondere gilt

$$\forall n \geq n_0 : a_{n+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n+1} = c \cdot b_{n+1} \text{ mit } c \equiv c(a_{n_0}, b_{n_0}) \text{ konstant}$$

Insgesamt kommen wir damit zu folgender Abschätzung für $n \geq n_0$

$$a_n{}^* := \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + c \cdot \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$$

Da $\sum_{k=1}^{n_0} a_k$ ebenfalls konstant ist und aber $\sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$ konvergiert, haben wir auch die Konvergenz der $a_n{}^*$ bewiesen, denn $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist monoton wachsend und beschränkt, es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} b_n{}^* = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n{}^* = a \text{ mit } 0 < a \leq b < \infty$$

und wir sind fertig.

Lösung 8.4:

Gegeben ist die reelle Nullfolge a_n mit $n \geq 0$ und die rekursiv definierte Folge A_n mit

$$A_0 := \frac{1}{2}a_0 \text{ und für } n \in \mathbb{N}\ A_n := \frac{1}{2}a_{2n-2} + a_{2n-1} + \frac{1}{2}a_{2n}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k =: A \in \mathbb{R}$$

gilt, also

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^* := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k =: \lim_{n\to\infty} A_n{}^*$$

Dafür schauen wir uns zunächst die rekursiv definierte Folge A_n und deren Partialsummenfolge $A_n{}^*$ an, wir sehen, daß

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} A_k\right) + \frac{1}{2}a_{2n}$$

gilt. Als nächstes betrachten wir den Grenzfall $n \to \infty$ und bekommen

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^* = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} a_k = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{n} A_k\right) + \frac{1}{2}a_{2n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} A_k\right) + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{2n}$$

da a_n aber eine Nullfolge ist, impliziert die Existenz der einen Seite die andere und vice versa, also gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k = A$$

und wir sind fertig!