Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen
Dr. Th. Rohwedder

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Serie 10

Abgabe bis 14.01.2013

Aufgabe 10.1: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$

b) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^k$, $n \in \mathbb{N}$ fest, $x \in \mathbb{R}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)2^k}{k^k} x^k$, $x \in \mathbb{R}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie hierfür auch die Grenzfunktion.

Aufgabe 10.2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{N}$ den Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ und diskutieren Sie in Abhängigkeit von k das Verhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls.

Aufgabe 10.3: (4 Punkte)

Bestimmen Sie ein möglichst großes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ so, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

für alle $x \in I$ konvergiert. Zeigen Sie, dass es eine rationale Funktion$f : I \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ für alle $x \in I$. Bestimmen Sie diese Funktion.
(*Hinweis:* Benutzen Sie den Produktsatz und die geometrische Reihe.)

Aufgabe 10.4: (4 Punkte)

a) Stellen Sie die Zahl 153 in der 5-adischen und 2-adischen (dualen) Darstellung dar.

b) Stellen Sie $\frac{1}{10}$ dual dar.

c) Beweisen Sie die Eindeutigkeit der b-adischen Darstellung für natürliche Zahlen!