Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung
ANALYSIS I (WS 12/13)
Serie 10

Musterlösung
S. Eulert

Aufgabe 10.1

In dieser Aufgabe wollen wir die Konvergenzradien R folgender Potenzreihen der Form $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit $x, x_0, a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}$ bestimmen, dazu stehen uns prinzipiell zwei Methoden zur Verfügung

- Cauchy-Hadamard
$$R = \frac{1}{L} \text{ mit } L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$
- Euler
$$R = \frac{1}{q} \text{ mit } q := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

a)

Es sei folgende Potenzreihe gegeben

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k \Leftrightarrow f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k \ , z = (x-1)$$

Wir nutzen das Kriterium nach *Euler* und erhalten

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = R_f$$

Nun resubstituieren wir und erhalten

$$|z| \le R_f = 1 \Leftrightarrow |x-1| \le 1 \Leftrightarrow x \in [0,2]$$

Somit konvergiert die Reihe absolut für $x \in (0,2)$, wobei der Rand, $x \in \{0,2\}$, separat untersucht werden muß. Generell gilt dies auch für die folgenden Konvergenzradien und entsprechende Konvergenzverhalten.

b)

Nun haben wir

$$g(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^k, n \in \mathbb{N} \text{ sei fest gewählt}$$

Wir nutzen das Kriterium nach *Euler* und erhalten

$$q = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{k+1}{n}}{\binom{k}{n}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!\,(k-n)!\,n!}{(k-n+1)!\,n!\,k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k-n+1} = 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$$

Also gilt wieder

$$R_g = \frac{1}{q} = 1$$

c)

Wir betrachten die Potenzreihe

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \cdot 2^k}{k^k} x^k$$

und wieder wollen wir das *Euler*-Kriterium nutzen und erhalten

$$q = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)!\cdot 2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!\cdot 2^k}{k^k}} \right| = q = \lim_{k\to\infty} 2\frac{k^k}{(k+1)^k} = 2 \cdot \frac{1}{e}$$

Somit gilt für den Konvergenzradius R

$$R_h = \frac{1}{q} = \frac{e}{2}$$

d)

Für die folgende Reihe wollen wir zusätzlich zum Konvergenzradius noch die zugehörige Grenzfunktion bestimmen, wir haben

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k}$$

um daraus eine Potenzreihe gemäß unserer Definition zu erhalten substituieren wir hier und erhalten mit

$$z = \frac{1}{1+x^2},\; v^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

wobei wir den Vorfaktor x^2 zunächst weggelassen haben, da dieser für das Konvergenzverhalten der Potenzreihe zunächst noch keine Rolle spielt.
Bei $v^*(z)$ handelt es sich um die geometrische Reihe, die nach dem *Cauchy-Hadamard/Euler*-Kriterium sofort den Konvergenzradius $R_{v^*} = 1$ hat $\{$die Koeffizientenfolge ist konstant 1$\}$, die Reihe konvergiert also absolut für

$$\forall z < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

und diesem Fall kennen wir bereits die Grenzfunktion für $v^*(z)$

$$v^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

Die Grenzfunktion für $v(x), x \neq 0$ ist demnach

$$x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k} = x^2 \cdot (1 + \frac{1}{x^2}) = 1 + x^2$$

Für den Fall $x = 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k}$ zwar nicht, allerdings ist $\frac{x^2}{(1+x^2)^k} = 0$ und somit gilt $v(0) = 0$, insgesamt haben wir

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Damit sind wir fertig.

Aufgabe 10.2

Es gilt die Potenzreihe $f_k(x)$ für $k \in \mathbb{N}$ auf ihren Konvergenzradius hin zu untersuchen

$$f_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$$

Wir nutzen das *Euler*-Kriterium und erhalten

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} \right| = 1 \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Also haben wir für $\forall k \in \mathbb{N}$ $R_{f_k} = 1$, also absolute Konvergenz für $x \in (-1, 1)$, für $x \in \{-1, 1\}$ haben wir

$$f_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \text{ und } f_k(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^k}$$

Für $k = 1$ divergiert $f_1(1)$ (harmonische Reihe), aber $f_1(-1)$ konvergiert (alternariende harmonische Reihe). Für $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ konvergieren dagegen sowohl $f_k(1)$ als auch $f_k(-1)$ und somit gilt

- $k = 1$
$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \text{ existiert für } x \in [-1, 1)$$
- $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$
$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \text{ existiert für } x \in [-1, 1]$$

Aufgabe 10.3

Wir betrachten erneut eine Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

und interessieren uns zunächst für das größtmögliche Konvergenzintervall $I \subset \mathbb{R}$, sodaß $g(x)$ für $x \in I$ existiert.
Mit dem *Euler*-Kriterium erhalten wir sofort

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+2}{n+1}\right| = 1 = R$$

Somit ist $I = (-1,1)$ unser gesuchtes Konvergenzintervall und damit auch gleichzeitig das größte, für alle $|x| \geq 1$ wäre nämlich unsere Koeffizientenfolge keine Nullfolge mehr.
Als nächstes zeigen wir die Existenz einer ganzrationalen Funktion f mit

$$f : I \ni x \mapsto \mathbb{R}, \text{ sodaß } f_{|I}(x) = g(x)$$

Wir wollen dafür die geometrische Reihe und das *Cauchy-Produkt* nutzen, also versuchen wir es doch einfach einmal

$$\forall x \in (-1,1)\ h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ ist die bekannte geometrische Reihe}$$

Wir multiplizieren sie mit sich selbst und nutzen das *Cauchy-Produkt*

$$h(x)^2 = \left[\frac{1}{1-x}\right]^2 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right]^2 \overset{\text{Cauchy-}}{\underset{\text{Produkt}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k} x^j \cdot x^{k-j}\right] \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k} x^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot x^k$$

Das ist genau die Eigenschaft, die wir gefordert haben, also ist die gesuchte ganzrationale Funktion f

$$f(x) = \left[\frac{1}{1-x}\right]^2 = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ auf } I = (-1,1)$$

und wir sind fertig.

Aufgabe 10.4

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der - wie wir später beweisen werden - eindeutigen Darstellung reeller Zahlen in verschieden Basissystemen

a)

So sieht die Zahl 153 im Dezimalsystem im Pentasystem wie folgt aus

$$153_{|10} = 3\cdot 5^3 + 2\cdot 5^2 + 1\cdot 5^1 + 3\cdot 5^0 = 3213_{|5}$$

und im Dualsystem

$$153_{|10} = 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1001001_{|2}$$

b)

Die rationale Zahl $\frac{1}{10}$ sieht im Dualsystem wie folgt aus - dabei stellen wir

$$0.1_{|10} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 2^{-k} = 0.a_1 a_2 \dots \text{ dar }, a_k \in \{0,1\}$$

und bekommen dann

$$\frac{1}{10} = 0.1_{|10} = 0.0001100110\overline{0011}_{|2}$$

Also insbesondere eine nicht-abbrechende Entwicklung.

c)

Jetzt wollen wir die Eindeutigkeit der b-adischen Darstellung für natürliche Zahlen beweisen ($b \neq 1$), dazu wählen wir zwei Darstellungen

$$q \in \mathbb{N}; a_k, c_k \in \{0, 1, \dots b-1\}, q = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot b^k \text{ und } q = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot b^k$$

Nun sei oBdA $m > n$, dann gilt

$$q - q = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot b^k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot b^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - a_k) b^k = \sum_{j=n}^{m-1} a_k b^k$$

Wir wollen zeigen, daß dies jedoch nicht geht, also einen Widerspruch ergibt und damit sofort $m = n$ folgt, dazu sehen wir für $m > n$

$$\sum_{j=n}^{m-1} a_k b^k = b^n \cdot \sum_{j=0}^{m-n-1} a_{n+j} \cdot b^j \geq b^n$$

und weiter gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (c_k - a_k) b^k \leq (b-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b^k = (b-1) \cdot \frac{b^n - 1}{b-1} = b^n - 1 < b^n$$

wir haben also unseren Widerspruch, unmöglich kann die Gleichung gößer und gleichzeitig kleiner sein, eine äquivalente Aussage (symmetrisch) bekommen wir auch sofort für $n > m$, es gilt also $n = m$, wir müssen also noch zeigen

$$\sum_{k=0}^{n-1} (c_k - a_k) b^k = 0 \Rightarrow c_k = a_k \text{ mit } c_k, a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$$

Sei dafür j der größte Index, bis zu welchem sich die Koeffizienten unterscheiden (diesen gibt es, ansonsten wären wir schon fertig), dann gilt (wir schätzen den Fehler)

$$\sum_{k=0}^{j} (c_k - a_k) b^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{j-1} (c_k - a_k) b^k + (c_j - a_j) b^j = 0 \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{j-1} (c_k - a_k) b^k \right| = \left| (c_j - a_j) b^j \right|$$

Wir wissen aber bereits (siehe oben!), daß gilt

$$\Big|\sum_{k=0}^{j-1}(c_k - a_k)b^k\Big| \leq b^j - 1 \text{ und weiter } \Big|(c_j - a_j)b^j\Big| \geq b^j$$

was uns zu unserer Zufriedenheit einen Widerspruch liefert, es folgt sofort $a_k = c_k$ und die Eindeutigkeit ist gezeigt und zusammen mit Existenzaussage einer solchen Zerlegung haben wir ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die g-adische Darstellung natürlicher Zahlen.
Eine weitere, sehr elegante Möglichkeit die obere Aussage zu beweisen, folgt dem sogenannten *Euklidischen*-Algorythmus. Wir sind fertig.