Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung
ANALYSIS I (WS 12/13)
Serie 11 Lösungsvorschlag

Aufgabe 11.1:

a) Man zeige mittels Fallunterscheidung, dass x_n monoton ist.

Fall 1: $(x_1 > x_0)$

Man zeige per Induktin, dass x_n monoton steigend für alle $n \geq 1$ ist.

Induktionsanfang: Der Induktionsanfang ist durch die Fallvorraussetzung erfüllt.

Induktionsschritt: Es gilt für $n \geq 2$, da f monoton steigend ist:

$$f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) \overset{IV}{\geq} 0 \Rightarrow f(x_{n-1}) \geq f(x_{n-2}) \Rightarrow x_n \geq x_{n-1}$$

Fall 2: $(x_1 \leq x_0)$

Man zeige per Induktin, dass x_n monoton fallend für alle $n \geq 1$ ist.

Induktionsanfang: Der Induktionsanfang ist durch die Fallvorraussetzung erfüllt.

Induktionsschritt: Es gilt für $n \geq 2$, da f monoton steigend ist:

$$f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) \overset{IV}{\leq} 0 \Rightarrow f(x_{n-1}) \leq f(x_{n-2}) \Rightarrow x_n \leq x_{n-1}$$

b) x_n ist beschränkt, da $x_0 \in [a, b]$ ist und damit per Induktion $x_n = f(x_{n-1}) \in [a, b]$ ist. Da x_n damit monoton und beschränkt ist, ist x_n auch konvergent gegen einen Grenzwert ξ.

c) Da f stetig ist gilt und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ gilt mit dem Folgenkriterium für Stetigkeit:

$$f(\xi) \overset{\text{Folgenkriterium}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

Aufgabe 11.2:

a) Die Betragsfunktion kann geschrieben werden durch

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist sie zumindest für $x \neq 0$ stetig, da x und $-x$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Betrachte nun die Stetigkeit bei $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} -x = 0 = f(0)$$
$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} x = 0 = f(0)$$

Damit ist f links- und rechtsstetig in 0 und somit stetig in 0.

b) Da $sin(x)$ und $\frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind, ist auch f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. In 0 ist f nach dem Folgenkriterium unstetig, denn mit $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi} > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi} = 0,$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} sin(2n\pi + \frac{1}{2}\pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0).$$

c) Da 1, $\alpha x - 2$ und βe^x für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig sind, ist f mindestens auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ stetig. Untersuche nun die Stetigkeit in $x = 1$ und $x = 2$.

$$\lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1_-} 1 = 1 = f(1)$$
$$\lim_{x \to 1_+} f(x) = \lim_{x \to 1_+} \alpha x - 2 = \alpha - 2 \stackrel{!}{=} 1 = f(1)$$

Damit folgt, dass $\alpha = 3$ sein muss, damit f in 1 stetig ist.

$$\lim_{x \to 2_-} f(x) = \lim_{x \to 2_-} 3x - 2 = 4 = f(2)$$
$$\lim_{x \to 2_+} f(x) = \lim_{x \to 2_+} \beta e^x = \beta e^2 \stackrel{!}{=} 4 = f(2)$$

Damit folgt, dass $\beta = \frac{4}{e^2}$ sein muss, damit f in 2 stetig ist.

Aufgabe 11.3:

a) Nach Vorraussetzung ist f stetig in 0, das heißt es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall z \in \mathbb{R} : |z| < \delta_0 \Rightarrow |f(z) - f(0)| = |f(z)| < \varepsilon.$$

Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}$ nun beliebig, dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x - y + y) - f(y)| = |f(x - y)| < \varepsilon.$$

b) Nach Aufgabe 11.2 a) ist die Betragsfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Weiter kann nach Aufgabe 2.5 die Minimumsfunktion geschrieben werden als:

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

Damit ist m aber eine Zusammensetzung von stetigen Funktionen und somit selbst stetig.

Aufgabe 11.4:

a) Es gilt, dass:

$$f(0.8) = 0.02768 > 0 \text{ und } f(0.9) = -0.30951 < 0.$$

Damit liegt nach dem Nullstellensatz in $[0.8, 0.9]$ eine Nullstelle der Funktion f. Weiter Gilt:

$$\begin{aligned} f(0.85) &= -0.15 < 0, \\ f(0.825) &= -0.06 < 0, \\ f(0.8125) &= -0.02 < 0, \\ f(0.80625) &= 0.003 > 0 \end{aligned}$$

und damit liegt eine Nullstelle in $[0.80625, 0.8125]$ mit $0.8125 - 0.80625 = 0.00625 < 0.008$.

b) Es gilt, dass:

$$f(1.2) = -0.211 < 0 \text{ und } f(1.3) = 0.412 > 0.$$

Damit liegt nach dem Nullstellensatz in $[1.2, 1.3]$ eine Nullstelle der Funktion f. Weiter Gilt:

$$\begin{aligned} f(1.25) &= 0.05 > 0, \\ f(1.225) &= -0.09 < 0, \\ f(1.2375) &= -0.02 < 0, \\ f(1.24375) &= 0.01 > 0 \end{aligned}$$

und damit liegt eine Nullstelle in $[1.2375, 1.24375]$ mit $1.24375 - 1.2375 = 0.00625 < 0.008$.