HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. A. GRIEWANK PH.D.; DR. A. HOFFKAMP;
DIPL.MATH. T.BOSSE; DIPL.MATH. L. JANSEN
DR. TH. ROHWEDDER

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Serie 12

Abgabe bis 28.01.2013

Aufgabe 12.1: (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen stetig sind:

(i)

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0. \end{cases}$$

(ii)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2x+12}{x+2} & \text{falls } x \neq -2 \\ 14 & \text{falls } x = -2 \end{cases}$$

Aufgabe 12.2: (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und die Grenzwerte $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to \infty} f(x)$ endlich. Zeigen Sie, dass f dann beschränkt und gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 12.3: (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es eine reelle Zahl $x > 0$ gibt, für die

(a) $e^{\sqrt{x}} = \sin x + 2$ beziehungsweise

(b) $e^x = 1 + x$ gilt.

Aufgabe 12.4: (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist f gleichmäßig stetig auf den Intervallen $(a, b]$ und $[b, c)$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c)$, so ist f gleichmäßig stetig auf $[a, c]$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1 \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Ist f auf jedem der Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, gleichmäßig stetig, so ist f gleichmäßig stetig auf $[x_0, x_n]$.

(iii) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine streng monoton steigende Folge reeller Zahlen. Ist f auf jedem der Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \mathbb{N}$, gleichmäßig stetig, so ist f gleichmäßig stetig auf $[x_0, \infty[$.