Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Lösungsvorschlag Serie 12

Lösung 12.1:

(i) Untersuche $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit mittels einer Fallunterscheidung:

a) Sei $x_0 \in (0, \infty)$. So ist f an x_0 stetig als Verkettung und Multiplikation von stetigen Funktionen.

b) (Beweis über $\varepsilon - \delta$-Definition) Sei nun $x_0 = 0$. So ist f an $x_0 = 0$ stetig, denn für ein beliebiges vorgegebenes $\varepsilon > 0$ existiert ein δ_ε, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, \infty) : |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

gilt. Z.B. folgt für die Wahl $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \overset{|\sin(\cdot)| \leq 1}{\leq} |x| = |x - 0| = |x - x_0| < \delta_\varepsilon < \varepsilon.$$

Somit ist f auf $[0, \infty)$ stetig.

(ii) Untersuche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit, wobei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2x+12}{x+2} & \text{falls } x \neq -2 \\ 14 & \text{falls } x = -2 \end{cases}.$$

a) Für $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \neq -2$ ist f stetig als Verkettung und Multiplikation von stetigen Funktionen. (Beachte, dass der Nenner wohldefiniert ist)

b) (Beweis über Folgenstetigkeit) Sei $x_0 = -2$. Wir haben nun zu zeigen, dass

$$\lim_{k \to \infty} x_k = -2 \implies \lim_{k \to \infty} f(x_k) = 14$$

Sei also $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige reelwertige Folge mit $\lim_{k \to \infty} x_k = -2$ und $x_k \neq -2$.

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{x_k^3 + 2x_k + 12}{x_k + 2} \right) \overset{\text{Pol.Div.}}{=} \lim_{k \to \infty} (x_k^2 - 2x_k + 6)$$
$$\overset{\text{Grenzwert Rechenregeln}}{=} \lim_{k \to \infty} x_k^2 - 2 \lim_{k \to \infty} x_k + 6 = 4 + 2 \cdot 2 + 6 = 14$$

Somit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Lösung 12.2:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und gelte weiter $\lim_{x\to\infty} f(x) = c_+$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c_-$ mit $|c_-|, |c_+| < \infty$, wir wollen zeigen, daß dann f auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beschränkt ist. Zunächst wiederholen wir die Definition

$$f \text{ glm.stetig auf } \mathcal{D} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathcal{D} : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1}$$

wobei in unserem Fall $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ist.
Wir unterteilen zunächst wie folgt

$$A := (-\infty, 0] \text{ und } B := [0, \infty), \text{ sodass } A \cup B = \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

Nun betrachten wir f auf A und B separat. Zunächst betrachten wir f auf B, hier gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c_+ < \infty$$

was insbesondere bedeutet, daß $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists x_0(\varepsilon) \equiv x_0 > 0\ \forall x \geq x_0 :\ |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Auf dem Intervall $[0, x_0]$ folgt die glm.Stetigkeit von f nach dem Satz von Heine, da $[0, x_0]$ kompakt ist und f stetig angenommen wurde.
Für das Intervall $[x_0, \infty)$ gilt $\forall x, y \geq x_0$ mittels der Dreiecksungleichung, dass

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) + c - c - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| \overset{(2)}{<} \varepsilon. \tag{3}$$

Daraus folgt sofort, daß f gleichmäßig stetig auf $[x_0, \infty)$ ist, da die obige Abschätzung unabhängig von δ gültig ist. Insbesondere können wir zeigen, dass f auf ganz B glm.stetig ist, da auf $[0, x_0]$ für jedes beliebig gegebene $\varepsilon/2 > 0$ ein entsprechendes $\delta > 0$ existiert, welches (1) erfüllt. Dieses könen wir auch für das Intervall $[x_0, \infty)$ nutzen, da hier sowieso $\forall x, y \geq x_0$ bei gegebenen $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Sei nun $x \in [0, x_0]$, $y \in [x_0, \infty)$ mit $|x - y| < \delta$ und somit $|x - x_0| < \delta$, wobei δ wie zuvor passend ε gewählt wurde. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) + f(x_0) - f(x_0) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| \overset{(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Insbesondere ist f aufgrund von (3) auf $[x_0, \infty)$ und nach Weierstrass auch auf $[0, x_0]$ beschränkt. Insgesamt gilt also, daß f auf B gleichmäßig stetig und beschränkt ist. Die gleiche Argumentation können wir auch auf $f : A \to f(A)$ anwenden und haben dann, daß f auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beschränkt ist.

Lösung 12.3:

a) In dieser Aufgabe wollen wir herausfinden, ob die gleich untersuchten Gleichungen unter der Annahme $x \in \mathbb{R}^+$ - die positiven reellen Zahlen ohne Null - Lösungen besitzen oder nicht, zunächst betrachten wir

$$e^{\sqrt{x}} = \sin(x) + 2 \tag{4}$$

Zuerst formulieren wir das Problem in ein Nullstellenproblem um, also

$$f(x) := \sin(x) + 2 - e^{\sqrt{x}} \stackrel{!}{=} 0$$

wir halten fest: $f(x)$ ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ als Komposition stetiger Funktionen. Da es uns lediglich um eine Existenzaussage geht, wollen wir als nächstes den *Zwischenwertsatz* anwenden, wir brauchen also

$$x_1 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) \leq 0 \text{ und } x_2 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) \geq 0$$

dann gilt nach dem *Zwischenwertsatz*, daß alle Werte im Intervall $I := [f(x_1), f(x_2)]$ angenommen werden, insbesondere würde das bedeuten, daß (oBdA $x_1 < x_2$)

$$\exists x_0 \in [x_1, x_2] : f(x_0) = 0$$

Wir testen und bekommen für

$$x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 2 : f(x_1) \approx 0.123,\ f(x_2) \approx -1.204$$

damit haben wir also die Sicherheit das (4) lösbar ist für mindestens ein $x \in (1,2)$ - mit Hilfe z.B. des Bisektionsverfahrens können wir noch genauer werden und bekommen

$$f(x^*) \approx 0 \text{ für } x^* = 1.140.$$

b) Jetzt wollen wir prüfen, ob für $x > 0$ die Gleichung

$$e^x = 1 + x \tag{5}$$

eine Lösung hat. Offensichtlich ist die Gleichung (3) für $x = 0$ gelöst, intuitiv ist uns eigentlich klar, daß es keine weitere Lösung geben kann, wir wollen das beweisen und sehen, daß mit

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ als Potenzreihe}$$

gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x \Longleftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

da wir aber $x > 0$ fordern, gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$$

was also sofort zeigt, daß Gleichung (5) keine Lösung für $x > 0$ haben kann. Wir sind fertig!

Lösung 12.4:

(i) Behauptung:

Sei f gleichmäßig stetig auf den Intervallen $(a, b]$ und $[b, c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a < b < c$. So lässt sich f gleichmäßig stetig auf $[a, c]$ fortsetzen.

Beweis:

Da f auf jedem der beiden Teilintervalle stetig ist, ist f an b links- bzw. rechtsstetig und es gilt:

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = f(b) = \lim_{x \searrow b} f(x)$$

Damit ist f schon mal stetig auf (a, c). Wir zeigen nun die gleichmäßig stetige Fortsetzbarkeit bei a. Die gleichmäßig stetige Fortsetzbarkeit bei c verläuft analog. Da f gleichmäßig stetig auf $(a, b]$ ist, gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in (a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Sei x_n eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ und $b > x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\forall \frac{\delta}{2} > 0 \; \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq k_\varepsilon : |x_n - a| < \frac{\delta}{2}.$$

Damit gilt aber gerade:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \; \forall n, m \geq k_\varepsilon : & |x_n - x_m| = |x_n - a - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \\ & \overset{(6)}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Und das heißt gerade, dass $f_n := f(x_n)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist und somit konvergiert. Setze $f(a) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ und erhalte eine stetige Funktion auf $[a, b]$, die mit Heine-Borel wieder gleichmäßig stetig ist.

(ii) Behauptung:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Ist f auf jedem der Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0, ..., n-1\}$, gleichmäßig stetig, so ist f gleichmäßig stetig auf $[x_0, x_n]$.

Beweis:

Da f auf jedem der Teilintervalle stetig ist, ist f an allen Ränder links- bzw. rechtsstetig und es gilt:

$$\forall 1 \leq i \leq n - 1 : \lim_{x \searrow x_i} f(x) = f(x_i) = \lim_{x \nearrow x_i} f(x)$$

Damit ist f aber stetig auf ganz $[x_0, x_n]$ und mit Heine-Borel auch gleichmäßig stetig auf $[x_0, x_n]$.

(iii) Behauptung:

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton steigende Folge reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Ist f auf jedem der Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ für $i \in \mathbb{N}_0$ gleichmäßig stetig, so ist f nicht zwingenderweise gleichmäßig stetig auf $[x_0, \infty)$.

Beweis:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und seien $x_i = i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist f mit Heine-Borel gleichmäßig stetig auf $[i, i+1]$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Es gibt jedoch für $\varepsilon = 1$ kein $\delta > 0$, welches (6) erfüllt, denn mit $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ folgt $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, aber

$$|x^2 - y^2| = |\frac{1}{\delta^2} - (\frac{1}{\delta^2} + 1 + \frac{\delta^2}{4})| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$