HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. A. GRIEWANK PH.D.; DR. A. HOFFKAMP;
DIPL.MATH. T.BOSSE; DIPL.MATH. L. JANSEN
DR. TH. ROHWEDDER

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Serie 13

Abgabe bis 04.02.2013

Aufgabe 13.1: (4 Punkte)

(i) Untersuchen Sie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot |x|$ auf Differenzierbarkeit und finden Sie den maximalen Bereich, auf welchem die Funktion invertierbar ist und geben Sie die Inversefunktion explizit an.

(ii) Untersuchen Sie $f(x) = \sqrt{(2x-3)\cdot(2-x)^3}$ auf Differenzierbarkeit für $\frac{3}{2} \le x \le 2$, einschließlich links- und rechtsseitiger Differenzierbarkeit.

(iii) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_q(x) = \begin{cases} x^q \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

mit $q \in \mathbb{Q}$ genau dann in $x = 0$ differenzierbar ist, wenn $q > 1$ gilt.

Aufgabe 13.2: (4 Punkte)

Der verletzte Achilles (A) und die Schildkröte (S) machen erneut ein Rennen. Sie starten beide zur selben Zeit $t = 0$ am Startpunkt $x(0) = 0$ und erreichen gleichzeitig zur Zeit $t = 2$ das Ziel $x(2) = 2$. Die Strecke, welche (S) und (A) während des Rennen zurücklegt haben, ist durch

$$x_S(t) = t \quad \text{beziehungsweise}$$
$$x_A(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$$

beschrieben. (Strecke x in Kilometer, Zeit t in Stunden)

(i) Prüfen Sie, ob (A) und (S) diesselbe Geschwindigkeit während des Rennen hatten. Berechnen Sie die Lösung, falls diese existiert.

(ii) Prüfen Sie, ob (A) irgendwann langsamer als $\frac{1}{3}$ km/h ist und geben Sie die Zeitpunkte an.

(iii) Prüfen Sie, ob (A) irgendwann schneller als $\frac{7}{2}$ km/h ist und geben Sie die Zeitpunkte an.

Aufgabe 13.3: (4 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y|^2 \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass f konstant ist.

<u>Aufgabe 13.4:</u> (4 Punkte)

(i) Ermitteln Sie eine allgemeine Formel für die Ableitung eines Produktes $g(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)$ von n differenzierbaren Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

(ii) Seien $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots f_n(x) > 0$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in D$ gilt:

$$\frac{(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots f_n)'(x)}{(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots f_n)(x)} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}$$