Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Lösungsvorschlag Serie 13

Lösung 13.1:

(i) Durch eine Fallunterscheidung ist leicht zu sehen, dass

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, & \text{falls } x < 0 \\ x^2, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Somit ist f ist differenzierbar auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$. Prüfe nun, ob f differenzierbar an $x = 0$ ist mittels des links- und rechtsseitigen Differenzenqoutienten:

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{(x+h)|x+h| - x|x|)}{h} \overset{x=0}{=} \lim_{h \nearrow 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \searrow 0} (-h) = 0$$
$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{(x+h)|x+h| - x|x|)}{h} \overset{x=0}{=} \lim_{h \searrow 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \searrow 0} h = 0$$

Also,

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Somit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Außerdem ist f auf ganz $\mathbb{R}$ invertierbar mit der Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{|y|}}, & \text{falls } y \neq 0 \\ 0, & \text{falls } y = 0 \end{cases}$$

da $f^{-1}(f(x)) = x$ gilt, wie man anhand der folgenden Fallunterscheidung sehen kann:

$$x \neq 0 \implies f(x) = x|x| \neq 0 \text{ und somit } f^{-1}(f(x)) = \frac{x|x|}{\sqrt{|x|x||}} = \frac{x|x|}{|x|} = x$$
$$x = 0 \implies f(x) = 0 \text{ und somit } f^{-1}(0) = 0.$$

(ii) Zunächst gilt:

$$x > 2 \implies (2-x)^3 < 0 \text{ und } (2x-3) > 0$$
$$x < \frac{3}{2} \implies (2-x)^3 > 0 \text{ und } (2x-3) < 0$$
$$\text{bzw. } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \implies (2-x)^3 \geq 0 \text{ und } (2x-3) \geq 0.$$

Die Funktion f ist somit nur auf dem Intervall $[3/2, 2]$ definiert. Desweiteren ist sie als Verkettung von differenzierbaren Funktionen auf $(3/2, 2)$ differenzierbar. Bestimme nun mittels des rechts- bzw. linksseitigen Differenzenqoutienten, ob f differenzierbar an den Randpunkten $x = 3/2$ und $x = 2$ ist:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\searrow 0} \frac{f(\frac{3}{2}+h) - f(\frac{3}{2})}{h} &= \lim_{h\searrow 0} \frac{\sqrt{(2-\frac{3}{2}-h)^3(2\frac{3}{2}+2h-3)} - \sqrt{(2-\frac{3}{2})^3(2\frac{3}{2}-3)}}{h} \\
&= \lim_{h\searrow 0} \frac{\sqrt{(\frac{1}{2}-h)^3(2h)}}{h} = \lim_{h\searrow 0} \sqrt{\frac{2}{h}(\frac{1}{2}-h)^3} = \infty \\
\lim_{h\nearrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h\nearrow 0} \frac{\sqrt{(2-2-h)^3(4+2h-3)} - \sqrt{(2-2)^3(4-3)}}{h} \\
&= \lim_{h\nearrow 0} \frac{\sqrt{(-h)^3(1+2h)}}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \sqrt{-h-2h^2} = 0
\end{aligned}
$$

Somit ist f an $x = \frac{3}{2}$ nicht rechtsdifferenzierbar, aber an $x = 2$ linksdifferenzierbar.

(iii) Betrachte für $q \in \mathbb{Q}$ den Differenzenquotienten

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^q \sin(1/(0+h)) - 0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^q \sin(1/h)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{q-1} \sin(1/h) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } q-1 > 0 \\ \text{undefiniert}, & \text{falls } q-1 \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

Lösung 13.2:

1. Die Geschwindigkeiten von (A) und (S) zum Zeitpunkt $t \in [0, 2]$ sind durch die ersten Ableitungen der Strecken Funktionen bezgl. der Zeit beschrieben:

$$
\begin{aligned}
\text{Geschwindigkeit von (S): } & S'(t) = 1 \\
\text{Geschwindigkeit von (A): } & A'(t) = 3t^2 - 6t + 3
\end{aligned}
$$

   Nach Mittelwertsatz

   Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$
f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.
$$

gilt also

$$A'(\xi) = \frac{A(b)-A(a)}{b-a} = \frac{2^3 - 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - (0^3 - 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0)}{2-0} = \frac{2}{2} = 1 = S'(t) \quad \forall t \in (a,b).$$

M.a.W. es existiert mindestens ein Zeitpunkt ξ, an welchem die Geschwindigkeit von (A) und (S) gleich ist. Dieser kann durch Gleichsetzen der beiden Geschwindigkeiten und Auflösen nach t bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & 0 = 3t^2 - 6t + 3 - 1 \\ \Longleftrightarrow & 0 = t^2 - 2t + \frac{2}{3} \\ \Longleftrightarrow & t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Dh. (A) und (S) waren zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 gleichschnell.

2. (A) langsamer als $\frac{1}{3} km/h$ bedeutet, dass

$$A'(t) \leq \frac{1}{3} \Longleftrightarrow 3t^2 - 6t + 3 \leq 1/3 \Longleftrightarrow t \in [2/3, 4/3]$$

Dh. (A) war für die Zeitpunkte $t \in [2/3, 4/3]$ langsamer als die vorgegebene Geschwindigkeit.

3. (A) schneller als $\frac{7}{2} km/h$ bedeutet, dass

$$A'(t) \geq \frac{7}{2} \Longleftrightarrow 6t^2 - 12t - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow t \leq 1 - \sqrt{\frac{7}{6}} \text{ oder } t \geq 1 + \sqrt{\frac{7}{6}}$$

Bemerkung: Beide Lösungsmengen sind außerhalb des zeitliches Verlaufs des Rennens!

Lösung 13.3:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und gelte

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x|^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere folgt daraus, dass

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq |y - x| \quad \text{für alle } x \neq y \in \mathbb{R}.$$

Im folgenden zeigen wir, dass f differenzierbar und konstant auf ganz R ist, dh. in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ die Ableitung null besitzt. Die Substitution $y = x + h$ liefert

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq |h| \quad \text{für alle } h \neq 0 \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$|f'(x)| = \left| \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \lim_{h\to 0} |h| = 0.$$

und somit dass f konstant ist, da für einen beliebigen Punkt x gezeigt wurde, dass die Ableitung gleich null ist.

Lösung 13.4:

1. Durch Induktion (hier weggelassen) und Anwenden der Produktregel erhält man

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f_i(x)$$

für $g(x) = (f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n)(x)$.

2. Nach Teilaufgabe (i) gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f_i(x).$$

und somit

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \prod_{i=1, i \neq k}^{n} f_i(x)}{\prod_{i=1}^{n} f_i(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x) \prod_{i=1, i \neq k}^{n} f_i(x)}{f_k(x) \prod_{i=1, i \neq k}^{n} f_i(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}.$$