Aufgabe 2.1: (2 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes:

$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Lösung 2.1:

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$(1+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k \quad \text{bzw.} \quad (1-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k.$$

Somit ergibt sich

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k).$$

Betrachte nun die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k).$$

Hierbei fällt auf, dass für die einzelnen Summenglieder gilt:

$$(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k = \begin{cases} 2\sqrt{3} & \text{für k gerade} \\ 0 & \text{für k ungerade} \end{cases}. \tag{1}$$

1. Fall: Nehme zuerst an, dass $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, dh. es existiert ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $n = 2\tilde{n}$. Dann folgt aus (1), dass alle ungeraden Summanden, für welche $k = 2l+1$ mit $l \in \mathbb{N}$ und $0 \leq l < \tilde{n}$ gilt, null sind. Somit reicht es über alle geraden Summanden, für welche $k = 2l$ mit $l \in \mathbb{N}$ und $0 \leq l \leq \tilde{n}$ gilt, zu summieren:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k) &= \sum_{l=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2l} ((\sqrt{3})^{2l} + (-\sqrt{3})^{2l}) \\ &= \sum_{l=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2l} (3^l + 3^l) = 2 \sum_{l=0}^{\tilde{n}} \binom{n}{2l} 3^l \end{aligned} \tag{2}$$

Nun ist noch zu überlegen, dass $\binom{n}{2l}$ und 3^l natürliche Zahlen für $0 \leq l \leq \tilde{n}$ sind. Somit ist der Ausdruck (2) als Multiplikation und Addition natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl und die Behauptung für den Fall n gerade bewiesen.

2. Fall: Der Fall für n ungerade funktioniert analog - d.h. nach gleicher Vorgehensweise mit gewissen Änderungen an den entsprechen Stellen.

Da die Aussage für alle möglichen Fälle (n ungerade und n gerade) gezeigt wurde, gilt die Behauptung.

Aufgabe 2.2: (3 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage durch vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ :\ \sum_{m=0}^{k} \binom{n+m}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

und veranschaulichen Sie diesen Zusammenhang im Pascalschen Dreieck.

Lösung 2.2:

$$A(n,k) \Longleftrightarrow \sum_{m=0}^{k} \binom{n+m}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Anfang der Induktion über n: $\forall\, k : A(1,k)$. Beweis dieser Aussage wiederum mit Induktion über k und $n=1$. *Anfang der Induktion über k:* $A(1,1)$

$$A(1,1) \Longleftrightarrow \sum_{m=0}^{1} \binom{1+m}{1} = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} = 1+2 = 3 = \binom{3}{2}$$

ist erfüllt.
Voraussetzung für Induktion über k:

$$\forall\, 1 \le \ell < k : \quad A(1,\ell)$$

Schritt der Induktion über k: $A(1,k-1) \Rightarrow A(1,k)$.

$$\begin{aligned}
A(1,k) &\Longleftrightarrow \sum_{m=0}^{k} \binom{1+m}{1} = \binom{k+2}{2} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{m=0}^{k-1} \binom{1+m}{1} + \binom{k+1}{1} = \binom{k+2}{2} \\
&\overset{\text{Ind.-V.}}{\Longleftarrow} \binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{1} = \binom{k+2}{2} \\
&\Longleftrightarrow \frac{(k+1)k}{2} + k + 1 = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \\
&\Longleftrightarrow \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + k + 1 = \frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} + 1
\end{aligned}$$

Implikation erfüllt; also schließt man: $\forall\, k \in \mathbb{N} :\ A(1,k)$. Damit ist der Anfang der Induktion über n erfüllt.
Voraussetzung für Induktion über n:

$$\forall\, 1 \le m < n\ \forall\, k \in \mathbb{N} : \quad A(m,k)$$

Schritt der Induktion über n: $A(n-1,k) \Rightarrow A(n,k)$.

$$\begin{aligned}
A(n,k) &\Longleftrightarrow \sum_{m=0}^{k} \binom{n+m}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} \\
&\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \sum_{m=0}^{k} \left(\binom{n-1+m}{n-1} + \binom{n-1+m}{n} \right) = \binom{n+k}{n} + \binom{n+k}{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{m=0}^{k} \binom{n-1+m}{n-1} + \sum_{m=0}^{k} \binom{n-1+m}{n} = \binom{n+k}{n} + \binom{n+k}{n+1} \\
&\overset{\text{Ind.-V.}}{\Longleftarrow} \binom{n+k}{n} + \sum_{m=0}^{k} \binom{n-1+m}{n} = \binom{n+k}{n} + \binom{n+k}{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{m=0}^{k} \binom{n-1+m}{n} = \binom{n+k}{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \underbrace{\binom{n-1}{n}}_{=0} + \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{n+\mu}{n} = \binom{n+k}{n+1} \\
&\overset{\text{Ind.-V.}}{\Longleftarrow} \binom{n+k}{n+1} = \binom{n+k}{n+1}
\end{aligned}$$

Implikation erfüllt. Also schließt man: $\forall\, n,k \in \mathbb{N}:\ A(n,k)$.

($(*)$ ist dabei die Identität $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$)

Das Pascal'schen Dreieck lässt sich wie folgt illustrieren:

$N\backslash K$	0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n	$\cdots$
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$		
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\cdots$	$\binom{n}{k}$	$\cdots$	$\binom{n}{n}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	

Dabei gilt stets $(*)$.
Die bewiesene Summenformel $A(n,k)$ sagt nun, dass die Summe der Einträge in der n-ten Spalte bis zur $(n+k)$-ten Zeile einschließlich gerade dem Eintrag in der $(n+1)$-ten Spalte in der $(n+k+1)$-ten Zeile entspricht.

Aufgabe 2.3: (4 Punkte)

1. Beweisen Sie mit Hilfe der Körper- und Anordnungsaxiome in $\mathbb{R}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq b \Longrightarrow a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

2. Begründen Sie mit Hilfe dieser Ungleichung, dass von allen Rechtecken mit festgelegtem Umfang U das Quadrat den maximalen Flächeninhalt hat.

Lösung 2.3:

1. Es gilt:

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 \overset{\text{Rechenregeln im Körper}}{=} \sqrt{a}^2\sqrt{b}^2 = ab \Longleftrightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

(i) Die erste Ungleichung erhält man wie folgt:

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \overset{\text{Anordnungsaxiome}}{\Longrightarrow} \sqrt{a}\sqrt{a} \leq \sqrt{a}\sqrt{b} \Longrightarrow a \leq \sqrt{ab}$$

(ii) Aus den Anordnungsaxiomen folgt bekanntermaßen die Positivität aller Quadratzahlen. Insbesondere

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \overset{\text{Binom.}}{\Longrightarrow} \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \geq 0 \Longrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(iii)

$$a \leq b \overset{\text{Anordnungsaxiome}}{\Longrightarrow} a + b \leq 2b \Longrightarrow \frac{a+b}{2} \leq b$$

2. Für die Seitenlängen eines Rechtecks $a \leq b$ mit $2(a+b) =: U$ gilt für die Fläche $A := ab$ nach der obgen Ungleichung:

$$A = ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \leq \frac{2b^2}{2} = b^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $(a-b)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b$. Also hat das Quadrat mit den Seitenlängen $a = b = U/4$ den maximalen Inhalt.

Aufgabe 2.4: (4 Punkte)

1. Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|x+2| \leq |x-1|$ erfüllen.
2. Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|2 - |x+1|| \leq 1$ erfüllen.
3. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Lösung von Ungleichungen der Form $|ax+b| < c$ für a, b, c und $x \in \mathbb{R}$.

Lösung 2.4:

1. Im Folgenden verwenden wir die Definition des Absolutbetrages und eine Fallunterscheidung um alle $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, welche der Ungleichung genügen:

$$
\begin{aligned}
|x+2| \leq |x-1| &\iff \begin{cases} x+2 \leq x-1 & \text{gdw.} \quad x+2 \geq 0 \ \wedge \ x-1 \geq 0 \\ -(x+2) \leq x-1 & \text{gdw.} \quad x+2 < 0 \ \wedge \ x-1 \geq 0 \\ -(x+2) \leq -(x-1) & \text{gdw.} \quad x+2 < 0 \ \wedge \ x-1 < 0 \\ x+2 \leq -(x-1) & \text{gdw.} \quad x+2 \geq 0 \ \wedge \ x-1 < 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2 \leq -1 & \text{gdw.} \quad x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{2} & \text{gdw.} \quad x < -2 \ \wedge \ x \geq 1 \\ -2 \leq -1 & \text{gdw.} \quad x < -2 \\ x \leq -\frac{1}{2} & \text{gdw.} \quad x \geq -2 \ \wedge \ x < 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \in \emptyset \\ x \in]-\infty, -2[\\ x \in \ [-2, -1/2] \end{cases} \\
&\iff x \in]-\infty; -1/2]
\end{aligned}
$$

2. Beträge auflösen per Fallunterscheidung.

$$
\begin{aligned}
|2-|x+1|| \leq 1 &\iff \begin{cases} |2-(x+1)| \leq 1 & \text{für} \quad x+1 \geq 0 \\ |2+(x+1)| \leq 1 & \text{für} \quad x+1 < 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1-x \leq 1 & \text{für} \quad x+1 \geq 0 \ \wedge \ 1-x \geq 0 \\ x-1 \leq 1 & \text{für} \quad x+1 \geq 0 \ \wedge \ 1-x < 0 \\ 3+x \leq 1 & \text{für} \quad x+1 < 0 \ \wedge 3+x \geq 0 \\ -3-x \leq 1 & \text{für} \quad x+1 < 0 \ \wedge 3+x < 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq 0 & \text{für} \quad x \geq -1 \ \wedge \ x \leq 1 \\ x \leq 2 & \text{für} \quad x \geq -1 \ \wedge \ x > 1 \\ x \leq -2 & \text{für} \quad x < -1 \ \wedge x \geq -3 \\ x \geq -4 & \text{für} \quad x < -1 \ \wedge x < -3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in [0,1] \\ x \in]1,2] \\ x \in [-3,-2] \\ x \in [-4,-3[\end{cases} \\
&\iff x \in [-4,-2] \cup [0,2]
\end{aligned}
$$

3. Für $c \leq 0$ ist die Lösungsmenge leer. Für $c > 0$ ist

$$
\begin{aligned}
|ax+b| < c &\iff -c < ax+b < c \iff -c-b < ax < c-b \\
&\iff \begin{cases} -\frac{c+b}{a} < x < \frac{c-b}{a} & \text{für} \quad a > 0 \\ -\frac{c+b}{a} > x > \frac{c-b}{a} & \text{für} \quad a < 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in \left]-\frac{c+b}{a};\ \frac{c-b}{a}\right[& \text{für} \quad a > 0 \\ x \in \left]\frac{c-b}{a};\ -\frac{c+b}{a}\right[& \text{für} \quad a < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Falls $a = 0$, ist für $|b| < c$ die Lösungsmenge ganz $\mathbb{R}$. Falls $a = 0$ und $|b| \geq c$ ist die Lösungsmenge leer.

Aufgabe 2.5: (3 Punkte)

Nennen Sie Ihre Vermutungen über die Bedeutung des Terms $\frac{x+y+|x-y|}{2}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, und beweisen Sie diese. Zeigen Sie mit ein paar Worten auf, wie Sie zu Ihrer Vermutungen kamen?

Lösung 2.5:

Idee ist es, die beiden möglichen Fälle zu betrachten, wie der Betrag aufgelöst werden kann: Falls $x \geq y$ gilt:

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

Und falls $y \geq x$ gilt:

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

Also ist

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \max(x,y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$