HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. A. GRIEWANK PH.D.; DR. A. HOFFKAMP;
DIPL.MATH. T.BOSSE; DIPL.MATH. L. JANSEN

Übungsaufgaben zur Vorlesung
ANALYSIS I (WS 12/13)
Serie 3

Abgabe bis 12.11.2012

Aufgabe 3.1: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie die Irrationalität von $\sqrt{3}$.

b) Bekanntlich ist $\sqrt{4} = 2$ eine rationale Zahl. An welchem Argument würde der Beweis aus dem ersten Aufgabenteil scheitern, wenn man ihn für $\sqrt{4}$ durchführt?

Aufgabe 3.2: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie:

Falls $r \neq 0$ rational und x irrational sind, so ist auch $r \cdot x$ irrational.

b) Zeigen Sie, dass für hinreichend große $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left|\frac{26}{m} - 1.3\right| = 2\left|\frac{13}{m} - 0.25\right| + |0.8|.$$

Aufgabe 3.3: (4 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie die Gleichheit

$$x^{p+q} = x^p x^q, \text{ wobei } x^{\frac{m}{n}} = [x^{\frac{1}{n}}]^m \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } m \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 3.4: (4 Punkte)

Man entscheide, ob folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimme ggf. $\sup M$ und $\inf M$. Weiter entscheide man, ob M ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 27\}$

b) $M = \{\frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

c) $M = \{\frac{x}{1+x} \mid x > -1,\ x \in \mathbb{R}\}$

d) $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 3.5: (4 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Benutzen Sie dabei lediglich die Definition von Konvergenz.

a) $a_n = \frac{n}{2^n}$

b) $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n^3}$