Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung
ANALYSIS I (WS 12/13)
Lösungsvorschlag Serie 3

Lösung 3.1:

1. Im folgenden zeigen wir durch eine Gegenannahme, dass $\sqrt{3}$ irrational ist. Angenommen, $\sqrt{3}$ ist rational, d.h. es exitieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. O.B.d.A. können wir insbesondere $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ teilerfremd angenehmen. Letztere Gleichung ist äquivalent zu $3 = \frac{a^2}{b^2}$ bzw. $3b^2 = a^2$. Daher können wir schliessen, dass 3 ein Teiler von a^2 und somit von a selbst ist (Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen). M.a.W. es existiert ein $\tilde{a}$ mit $a = 3\tilde{a}$. Durch einsetzen in $3b^2 = a^2 = 9\tilde{a}$ und dividieren durch 3 folgt nun, dass 3 auch ein Teiler von b^2 bzw. b ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme ' $a \in \mathbb{N}$ ud $b \in \mathbb{N}$ teilerfremd'.

2. An dem Schritt, welcher die Primfaktorzerlegung ausnutzt.

Lösung 3.2:

1. Beweis durch Widerspruch: Annahme $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, so ist $r \cdot x \in \mathbb{Q}$. Gelte nun $r \cdot x \in \mathbb{Q}$, d.h. es existieren $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ mit $r \cdot x = \frac{a}{b}$. Da $r \in \mathbb{Q}$ gilt, existieren desweitern $c \in \mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{Z}$ mit $c, d \neq 0$, so dass $r = \frac{c}{d}$. Somit lässt sich aber x als $r^{-1}(\cdot r \cdot x) = r^{-1}\frac{a}{b} = \frac{d}{c}\frac{a}{b} = \frac{ad}{bc} = \frac{e}{f}$ darstellen, also folgt der Widerspruch $x \in \mathbb{Q}$ (denn die Produkte von ganzen Zahlen sind wieder Element der ganzen Zahlen, insbesondere $e = ad, f = bc \in \mathbb{Z}$ und somit $x = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$).

2. Zunächst sehen wir (aufgrund der Rechenregeln des Absolutbetrags), dass

$$\begin{aligned}
\left|\frac{26}{m} - 1.3\right| &= 2\left|\frac{13}{m} - 0.25\right| + |0.8| && \mid 0.8 > 0 \\
\iff \left|\frac{26}{m} - 1.3\right| &= \left|\frac{26}{m} - 0.5\right| + 0.8 && \mid \cdot 2m \\
\iff |52 - 2.6m| &= |52 - m| + 1.6m
\end{aligned}$$

Für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 52$ sehen wir nun, dass $52 - 2.6m \leq 0$ und $52 - m \leq 0$, somit

$$\begin{aligned}
&\iff -52 + 2.6m = -52 + m + \frac{8}{5}m \\
&\iff 2.6m = m + 1.6m && = \text{wahre Aussage}
\end{aligned}$$

D.h. für $m \geq 52$ ($\approx$ hinreichend gross) gilt die Gleichheit.

Lösung 3.3:

Sei $p, q \in \mathbb{Q}$, dann existieren $q_1, p_1 \in \mathbb{Z}$ und $q_2, p_2 \in \mathbb{N}$, sodass $p = \frac{p_1}{p_2}$ und $q = \frac{q_1}{q_2}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
x^{p+q} &= x^{\frac{p_1}{p_2}+\frac{q_1}{q_2}} = x^{\frac{p_1q_2+p_2q_1}{p_2q_2}} = x^{\frac{p_1q_2+p_2q_1}{p_2q_2}} \\
&\overset{(**)}{=} \left[x^{\frac{1}{p_2q_2}}\right]^{p_1q_2+p_2q_1} \overset{(*)}{=} \left[x^{\frac{1}{p_2q_2}}\right]^{p_1q_2} \left[x^{\frac{1}{p_2q_2}}\right]^{p_2q_1} \\
&= \left[x^{\frac{1}{p_2q_2}}\right]^{p_1q_2} \left[x^{\frac{1}{p_2q_2}}\right]^{p_2q_1} \overset{(**)}{=} \left[x^{\frac{p_1q_2}{p_2q_2}}\right] \left[x^{\frac{p_2q_1}{p_2q_2}}\right] \\
&= \left[x^{\frac{p_1}{p_2}}\right] \left[x^{\frac{q_1}{q_2}}\right] = x^p x^q,
\end{aligned}$$

wobei $(*)$ in der Vorlesung gezeigt wurde und $(**)$ nach Vorraussetzung gilt.

Lösung 3.4:

a) M ist nur nach oben beschränkt durch $\sup\{M\} = 3$.

b) M ist nach unten und oben durch $\min\{M\} = \inf\{M\} = 0$ bzw. $\sup\{M\} = 1$ beschränkt.

c) M ist nur nach oben durch $\sup\{M\} = 1$ beschränkt.

d) M ist nach unten und nach oben durch $\inf\{M\} = 0$ bzw. $\sup\{M\} = \frac{3}{2}$ beschränkt.

Hinweis: Die Beweise wurden hier ausgelassen, gehören aber normalerweise dazu (Prüfen der Definitionen). Z.B. muss man bei *b*) verifizieren, dass $\sup\{M\} = 1$ die kleinste obere Schranke ist: M.a.W. man muss nachweisen, dass $s = 1$ eine obere Schranke ist, d.h. für alle $m \in M$ gilt $m \leq s$. Dies folgt, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n-1}{n+1} \leq 1 = 1 \iff n - 1 \leq n + 1 \iff -1 \leq +1 \text{ (wahr)}$$

Kleinste obere Schranke: Annahme es existiert eine obere Schranke $\tilde{s}$ mit $0 < \tilde{s} < 1$ und $m \leq \tilde{s}$ für alle $m \in M$. Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}}$ und $n_0 < \frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}} + 2$, dann folgt $K = \frac{n_0-1}{n_0+1} \in M$ und

$$\begin{aligned}
& n_0 > \frac{1+\tilde{s}}{1-\tilde{s}} \\
\iff & n_0(1-\tilde{s}) > 1 + \tilde{s} \\
\iff & n_0 - \tilde{s}n_0 > 1 + \tilde{s} \\
\iff & n_0 - 1 > \tilde{s}(n_0 + 1) \\
\iff & \frac{n_0 - 1}{n_0 + 1} > \tilde{s}
\end{aligned}$$

Widerspruch zur Annahme '$\tilde{s}$ ist obere Schranke' von M. Somit ist $s = 1$ kleinste, obere Schranke. Es gilt aber offensichtlich $s \notin M$, da aus $s \in M$ der Widerspruch $1 = \frac{n-1}{n+1} \Leftrightarrow n + 1 =$

$n-1 \Leftrightarrow -1 = 1$ folgt. Somit haben wir nur das Supremum $s = \sup\{M\} = 1$, welches aber kein Maximum ist.

Lösung 3.5:

Im folgenden benutzen wir die Definition:

Eine Folge x_n heisst konvergent gegen den Grenzwert x , falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \epsilon : |x_n - x| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N_0.$$

Sonst nennen wir sie divergent.

a) Die Folge ist konvergent mit Grenzwert $x = 0$: Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest gegeben, so gilt

$$|x_n - x| = \left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \left|\frac{n}{2^n}\right| = \frac{n}{2^n} = \frac{n^2}{n2^n} < \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_0(\epsilon) = \max\left(5, \frac{1}{\epsilon}\right)$, denn aus früheren Aufgaben wissen wir, dass

$$n^2 < 2^n \quad \text{bzw.} \quad \frac{n^2}{2^n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5.$$

b) Die Folge ist konvergent mit Grenzwert $x = 3$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest gegeben, so gilt

$$|x_n - x| = \left|3 + \frac{(-1)^n}{n^3} - 3\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3} < \epsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N_0(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}}$, denn $n > \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}} \Longleftrightarrow \epsilon > \frac{1}{n^3}$.