Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung
ANALYSIS I (WS 12/13)
Serie 4

Abgabe bis 19.11.2012

Aufgabe 4.1: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildungen
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(m) = (m-1, 2)$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g((m,n)) = m+n$. Untersuchen Sie $f, g, f \circ g, g \circ f$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Aufgabe 4.2: (4 Punkte)

Seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist g injektiv.

b) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist f injektiv.

c) Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist g injektiv und f surjektiv.

d) Ist g surjektiv und f bijektiv, so ist $f \circ g$ bijektiv.

Aufgabe 4.3: (4 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Ausdrücke für $n \to \infty$.

a) $x_n = \frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_p n^p}$, für fest gegebene $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le p)$ und $b_p \neq 0$.

b) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

c) $x_n = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

d) $x_n = \frac{n^2-2}{3n^2+1} \sqrt[n]{n^3}$

Aufgabe 4.4: (4 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

b) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren, dann divergieren auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4.5: (4 Punkte)

Das Pendel einer Uhr mit einer Schwingungsdauer (Periode) von 2 Sekunden wird innerhalb der ersten Sekunde jeder Periode durch einen Stoss angeregt; dadurch vermehrt sich seine Gesamtenergie jeweils um ein Joule. In der restlichen Zeit der Periode verringert sich die Energie des Pendels (durch Reibung) jeweils um 4%.
Mit E_n bezeichne die Gesamtenergie des Pendels zu Beginn der n-ten Periode.

a) Geben Sie ein Rekursionsformel für die Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

b) Für den Fall $E_0 = 0$ zeige man, dass die Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge, falls dieser existiert.