Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Lösungsvorschlag Serie 4

Lösung 4.1:

Wir zeigen, dass die entsprechende Funktion $h : X \to Y$ jeweils die Definition für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität erfüllt bzw. verletzt, dh. wir prüfen die Eigenschaften:

1. Die Funktion h heisst injektiv, falls $\forall x_1, x_2 \in X : [h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$.
2. Die Funktion heisst surjektiv, falls $\forall y \in Y\colon\ \exists x \in X\colon\ h(x) = y$
3. Die Funktion heisst bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv und nicht bijektiv:

- Sei $f(n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ beliebig und gelte $f(m) = f(n)$, so folgt nach Definition von f, dass $(m-1, 2) = (n-1, 2)$ und somit $m = n$.
- f ist nicht surjektiv, denn es existiert z.B. kein $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = (0, 3)$, dh. $(0, 3)$.
- f ist nicht bijektiv, da f nicht surjektiv ist.

$g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv und nicht bijektiv:

- g ist nicht injektiv; da $g((2, 1)) = g((1, 2))$.
- g ist surjektiv, für alle $z \in \mathbb{Z}$ ein $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ existiert mit $z = g((z_1, z_2))$, z.B.$(z, 0)$ erfüllt $z = g((z, 0)) = z + 0 = z$.
- g ist nicht bijektiv, da g nicht injektiv ist.

$fog : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $fog(m, n) = (m+n-1, 2)$ ist weder surjektiv, injektiv noch bijektiv:

- fog ist nicht injektiv, da $z_1 = (2, 1) \neq (1, 2) = (1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aber

$$fog((2, 1)) = (2 + 1 - 1, 2) = (2, 2) = (1 + 2 - 1, 2) = fog((1, 2)).$$

- fog ist nicht surjektiv, da z.B. kein $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ existiert mit $fog(z_1, z_2) = (0, 1)$.
- Somit kann fog nicht bijektiv sein.

$gof : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $gof(m) = m + 1$ ist surjektiv, injektiv und bijektiv:

- gof ist injektiv, da $gof(m) = gof(n)$ impliziert $m + 1 = n + 1$ bzw. $m = n$.
- gof ist surjektiv, da für alle $z \in \mathbb{Z}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ exitiert, so dass $z = gof(m)$, denn $z = gof(m) = g(m - 1, 2) = m - 1 + 2 = m - 1$, d.h.wähle $m = z + 1$.
- gof ist bijektiv, da Injektivität und Surjektivität gegeben ist.

	f	g	$f \circ g$	$g \circ f$
injektiv	JA	NEIN	NEIN	JA
surjektiv	NEIN	JA	NEIN	JA
bijektiv	NEIN	NEIN	NEIN	JA

Lösung 4.2:

1. RICHTIG: Wir zeigen daß die Aussage wahr ist, indem wir nachweisen, dass $f \circ g$ nicht injektiv, falls g nicht injektiv ist. Wenn g nicht injektiv ist, dann existieren $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ und $b = g(a_1) = g(a_2) \in B$. Somit finden wir dass $f \circ g$ nicht injektiv, denn
$$(f \circ g)(a_1) = f(g(a_1)) = f(b) = f(g(a_2)) = (f \circ g)(a_2), \qquad \text{aber } a_1 \neq a_2.$$
2. FALSCH: vgl. Aufgabe 4.1, dort ist ein Gegenbeispiel mit $f \circ g$ injektiv und f nicht injektiv gegeben(- einfach Notation vertauschen $f = g$ und $g = f$).
3. RICHTIG: Die Injektivität von g folgt aus der ersten Aufgabe, da $(f \circ g)$ bijektiv und somit insbesondere injektiv ist. Zu zeigen ist also nur noch, dass f surjektiv ist. Da $(f \circ g)$ bijektiv, also auch surjektiv ist existiert für alle $c \in C$ ein $a \in A$, so dass $c = (fog)(a) \Rightarrow$ Für alle $c \in C$ existiert $b \in B$ mit $c = f(b)$, nämlich $b = g(a)$; also ist f surjektiv.
4. FALSCH: Betrachte das Gegenbeispiel $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = |x|$. Dann ist f bijektiv, g surjektiv, aber fog nicht bijektiv.

Lösung 4.3:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$x_n = \frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_p n^p} = \frac{\left(\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + a_p\right) n^p}{\left(\frac{b_0}{n^p} + \frac{b_1}{n^{p-1}} + \cdots + b_p\right) n^p} = \frac{\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + a_p}{\frac{b_0}{n^p} + \frac{b_1}{n^{p-1}} + \cdots + b_p}.$$
Desweiteren sehen wir , dass für alle $i = 1, \ldots, p$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{p-i}}{n^i} = 0 \text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} \frac{b_{p-i}}{n^i} = 0$$
gilt. Somit
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + a_p\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{n^p} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + a_p = 0 + 0 + \cdots + \lim_{n\to\infty} a_p = a_p$$
und
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_0}{n^p} + \frac{b_1}{n^{p-1}} + \cdots + b_p\right) = b_p.$$
Da beide Grenzwerte existieren (endlich sind) und $b_p \neq 0$ folt damit schliesslich nach den Rechenregeln für Grenzwerte, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_p n^p} = \frac{a_p}{b_p}.$$

2. Betrachte zunächst ein beliebiges Folgenglied x_n für $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n}\left(\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1}$$

Da der Ausdruck $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ (gegen den Grenzwert 1) konvergiert, folgt nach den Aussagen über Grenzwerte, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{1+\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{1+1}.$$

Also konvergiert die Folge x_n gegen $1/2$ für $n \to \infty$.

3. Die Summe der Quadratzahlen (Quadratische Pyramidalzahl) ist gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

Somit gilt für die Folgenglieder

$$x_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6n^3}(2n^3+3n^2+n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Also gilt (beachte, dass die Folgen der einzelnen Summanden konvergieren)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3}+0+0 = \frac{1}{3}.$$

4. Wir zeigen zuerst, dass beide Terme des Produktes konvergieren. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{3n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n^2+1/3-7/3}{n^2+1/3}\right) = \frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{7/3}{n^2+1/3}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

und nach VL wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, somit folgt

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^3}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}^3) = (\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n})^3 = 1^3 = 1.$$

Da beide obigen Folgen konvergieren, können wir mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte weiter schliessen, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{3n^2+1}\sqrt[n]{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{3n^2+1}\right)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3} = 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Lösung 4.4:

a) RICHTIG.

$\Longrightarrow$ Gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, d.h. die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den Grenzwert a bzw. b. Zu zeigen ist, dass dann auch die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (gegen $a + b$) und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (gegen $a - b$) konvergieren. D.h. wir müssen zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ existiert, so dass für alle $n > N(\epsilon)$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \epsilon \quad \text{bzw. } |(a_n - b_n) - (a - b)| < \epsilon.$$

Da die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren existiert (nach Definition) für alle reelwertigen $\epsilon > 0$ ein $N_a(\epsilon) \in \mathbb{N}$ und $N_b(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n \geq N_a(\epsilon) \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n \geq N_b(\epsilon).$$

Insbesondere gilt für alle $n \geq N(\epsilon) = \max(N_a(\epsilon), N_b(\epsilon))$, dass

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt nun für alle $n \geq N(\epsilon)$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

und somit die Konvergenz von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Der Fall $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfolgt analog, denn aus der Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b, folgt die Konvergenz von $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $-b$.

$\Longleftarrow$ Betrachte die Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{und} \quad d_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, gilt dies auch für $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit folgt aufgrund des ersten Teils der Aufgabe, dass auch

$$(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (c_n - d_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergieren. Da aber nun genau $c_n + d_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{2}(a_n - b_n) = a_n$ bzw. $c_n - d_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{1}{2}(a_n - b_n) = b_n$ gilt, haben wir die Aussage gezeigt.

b) FALSCH. Betrachte das folgende Gegenbeispiel gegeben durch $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich divergieren beide Folgen, sowie die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Folgenglieder durch $a_n + b_n = 2 * (-1)^n$ gegeben ist (also zwischen -2 und 2 'springen'). Allerdings konvergiert die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da $a_n - b_n = (-1)^n - (-1)^n = 0$ gilt und es somit eine konstante Folge ist (sogar kontant null).

c) FALSCH. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ is offensichtlich konvergent. Sei nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige divergente Folge (z.B. $b_n = n$), so folgt $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trotzdem noch konvergiert, da $a_n b_n = 0 * b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit anderen Worten, auch wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind, so muss keine Konvergenz für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgen.

Lösung 4.5:

a) Sei E_n die Energie zum Anfang der $n-$ten Periode. Nach Vorraussetzung erhöht sich diese nach einer Sekunde um ein Joule, d.h. $E_n^{zwischenwert} = E_n + 1$. In der darauffolgenden Sekunde reduziert sich diese Energie um 4%, d.h. am Ende der Periode (=Anfang der $n+1$ Periode) ist die Energie durch

$$E_{n+1} = (100-4)/100 E_n^{zwischenwert} = \frac{24}{25}(E_n + 1) = \frac{24}{25}E_n + \frac{24}{25}$$

gegeben, was somit unsere Rekursionsformel für einen Startwert E_0 darstellt.

b) Sei dieser Startwert nun durch $E_0 = 0$ gegeben. Wir behaupen nun, dass die Folge monoton steigend und durch $r = 24$ beschränkt ist. Dies kann durch eine Induktion bewiesen werden. Der Induktionsanfang ist für $n = 1$ gültig, da $0 \leq E_0 = 0 \leq 24/25 = E_1 < r$. Im Induktionsschritt $(n \to n+1)$ kann man nun mittels der (Induktions-)Annahme $0 \leq E_{n-1} \leq E_n \leq r$ für $n \geq 1$ zeigen, dass

$$0 \leq E_n = \frac{24}{25}E_{n-1} + \frac{24}{25} \leq \frac{24}{25}E_n + \frac{24}{25} = E_{n+1} = \frac{24}{25}(E_n + 1) \leq \frac{24}{25}(r+1) = \frac{24}{25}(24+1) = 24$$

gilt.

c) Nach Teil *a)* und *b)* der Aufgabe existiert ein Grenzwert für diese Folge mit Startwert $E_0 = 0$, da sie monoton wachsend und nach oben beschränkt ist (vgl. VL). Sei nun $\lim_{n\to\infty} E_n = E_*$ der Grenzwert dieser Folge. So folgt aus

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{24}{25}E_n + \frac{24}{25}\right) = \frac{24}{25}\lim_{n\to\infty}(E_n) + \frac{24}{25},$$

dass der Grenzwert durch

$$E_* = \frac{24}{25}E_* + \frac{24}{25} \Longleftrightarrow E_* = 24$$

gegeben ist.