Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

# Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Serie 5

Abgabe bis 26.11.2012

---

**Aufgabe 5.1:** (4 Punkte)

Beschreiben Sie für jede der folgenden Bedingungen die Menge der reellen Folgen, die diese Eigenschaft erfüllen, **mit wenigen Worten**.

a) $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |a_n| < \epsilon$

b) $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall \epsilon > 0 \; \forall n \geq N : |b_n| < \epsilon$

c) $\forall N \in \mathbb{N} \; \exists \epsilon > 0 \; \forall n \geq N : |c_n| < \epsilon$

d) $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \exists \epsilon > 0 : |d_n| < \epsilon$

e) $\exists \epsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N : |e_n| < \epsilon$

**Aufgabe 5.2:** (4 Punkte)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$.
Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann ebenfalls Nullfolge ist.

b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass auf die Voraussetzung "$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt" nicht verzichtet werden kann.

**Aufgabe 5.3:** (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge reeller Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

ebenfalls gegen $a$ konvergiert.
Gilt die Umkehrung der Aussage auch? Wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a$ konvergiert, dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

**Aufgabe 5.4:** (4 Punkte)

Eine *Kettenwurzel*

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$$

kann erklärt werden als der Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_1 := \sqrt{2} \text{ und } x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}.$$

Zeigen Sie, dass dieser Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn.