Aufgabe 5.1: (4 Punkte)

Beschreiben Sie für jede der folgenden Bedingungen die Menge der reellen Folgen, die diese Eigenschaft erfüllen, **mit wenigen Worten**.

a) $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n| < \epsilon$

b) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \epsilon > 0\ \forall n \geq N : |b_n| < \epsilon$

c) $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists \epsilon > 0\ \forall n \geq N : |c_n| < \epsilon$

d) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \exists \epsilon > 0 : |d_n| < \epsilon$

e) $\exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |e_n| < \epsilon$

Lösungsalternative 5.1:

a) Diese Aussage kann ausgedehnt werden zu

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - \mathbf{0}| < \epsilon$$

Diesen Anforderungen können nur Nullfolgen gerecht werden.

b) Entsprechend beschreibt diese Aussage alle Formeln die ab einem beliebigen aber für sie fixen Index $N \in \mathbb{N}$ identisch zur Nullfolge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ werden. Beispiele

$$\begin{aligned}
(b_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (1, 2, 42, -80.000, 3, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \\
(\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}} &= \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n < 100 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
(\bar{b}_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (0)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

c) Zu jedem Index $N \in \mathbb{N}$ lässt sich ein ϵ–Schlauch von **fester Breite** finden, den die Folge ab da nicht mehr verlässt. Also beschreibt die Aussage hier alle beschränkten Folgen.

d)

e) Die hier beschriebenen Folgen sollen also wenigstens eine beschränkte Teilfolge beeinhalten. Beispielsweise

$$\begin{aligned}
(e_n)_{n\in\mathbb{N}} &= \begin{cases} \exp(n) & \text{für } n \text{ gerade} \\ \exp(-n) & \text{sonst} \end{cases} \\
(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}} &= n^{(-1)^n}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.2: (4 Punkte)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$.
   Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann ebenfalls Nullfolge ist.

b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass auf die Voraussetzung "$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt" nicht verzichtet werden kann.

Lösungsalternative 5.2:

a) Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gilt

$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\epsilon : \, |0 - a_n| = |a_n| \leq \epsilon \tag{1}$$

   Desweiteren ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also gilt

$$\exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0}\, \forall n \in \mathbb{N} : \, |b_n| \leq c \tag{2}$$

   Sei jetz $\tilde{\epsilon} > 0$. Dann, für $n > n_{\frac{\tilde{\epsilon}}{c}}$ (also $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{c}$ von (1)) gilt

$$|0 - a_n \cdot b_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot c \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{c} c = \tilde{\epsilon}.$$

b) Naheliegend ist folgendes Beispiel. Wähle dazu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n$, dann ist

$$a_n \cdot b_n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Aufgabe 5.3: (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge reeller Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

ebenfalls gegen a konvergiert.
Gilt die Umkehrung der Aussage auch? Wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Lösungsalternative 5.3:

Sei $\epsilon > 0$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, es gilt

$$\exists\, n_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_{\frac{\epsilon}{2}} : \, (a_n \leq a + \frac{\epsilon}{2} \, \wedge \, a_n \geq a - \frac{\epsilon}{2})$$

Sei jetzt $n_{0_1} := \max(n_{\frac{\epsilon}{2}}, \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{n_{\frac{\epsilon}{2}}} a_i}{\frac{\epsilon}{2}} \right\rceil) + 1$. Es gilt dann $\forall n \geq n_{0_1}$

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_{\frac{\epsilon}{2}}} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=n_{\frac{\epsilon}{2}}+1}^{n} a_i \leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{n - (n_{\frac{\epsilon}{2}} + 1)}{n}\right)\left(a + \frac{\epsilon}{2}\right) \leq a + \epsilon.$$

Sei n_T gross genug so dass $\left(\frac{n-(n_{\frac{\epsilon}{2}}+1)}{n}\right)\left(a-\frac{\epsilon}{2}\right) \geq a-\epsilon \quad \forall n \geq n_T$.

Dann mit $n_{0_2} := \max(n_{\frac{\epsilon}{2}}, n_T)+1$, es gilt für $n \geq n_{0_2}$

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_{\frac{\epsilon}{2}}} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=n_{\frac{\epsilon}{2}}+1}^{n} a_i \geq \left(\frac{n-(n_{\frac{\epsilon}{2}}+1)}{n}\right)\left(a-\frac{\epsilon}{2}\right) \geq a-\epsilon$$

Dann gilt für $n \geq \max(n_{0_1}, n_{0_2})$:

$$(-\epsilon \leq b_n - a \wedge b_n - a \leq \epsilon) \iff |b_n - a| \leq \epsilon$$

und wird die konvergenz von b_n gegen a bewiesen $\quad\square$.

Die Umkehrung gilt nicht. Wähle dazu $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$.

Dann ist a_n divergent, aber

$$b_n = \frac{1}{n}(0+1+0+1+0+\dots) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die folge b_n kovergiert gegen $\frac{1}{2}$: Sei $\epsilon > 0$, dann wählen wir $n_0 = \lceil \frac{1}{2\epsilon} \rceil$, und für $n \geq n_0$ gilt dann

$$|b_n - \frac{1}{2}| \leq |\frac{1}{2n}| \leq |\frac{2\epsilon}{2}| = \epsilon.$$

Aufgabe 5.4: (4 Punkte)

Eine *Kettenwurzel*

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$$

kann erklärt werden als der Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_1 := \sqrt{2} \text{ und } x_{n+1} := \sqrt{2+x_n}.$$

Zeigen Sie, dass dieser Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn.

Lösungsalternative 5.4:

Zuerst zeige *Monotonie* und *Beschränktheit* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Monotonie der Folge Behaupte $x_n \geq x_{n+1}$. Hier kann ein Induktionsbeweis als Beweisprinzip gewählt werden

(IA) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{Monotonie der Wurzelfunktion}} x_2 > x_1$.

(IV) Für alle $k \in \mathbb{N}$, mit $k < n$ gilt, dass $x_{k+1} > x_k$.

(IB) Dann gilt auch für $n \in \mathbb{N}: x_{n+1} > x_n$.

(IS) Es ist $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ also

$$\text{Nach } \textbf{(IV)} \text{ gilt } x_n > x_{n-1} \text{ also auch } 2 + x_n = 2 + \sqrt{2 + x_{n-1}} > 2 + x_{n-1} \tag{3}$$

Auch hier greift die Monotonie der Wurzel und so bleibt die Abschätzung unter (3), auch nach dem Wurzelziehen, erhalten

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + x_{n-1}}}}_{=x_{n+1}} > \underbrace{\sqrt{2 + x_{n-1}}}_{=x_n}$$

Insgesammt also ist der Schritt mit $x_{n+1} > x_n$ vollzogen.

Somit ist die *Monotonie der Folge* gezeigt.

Beschränktheit der Folge Die Folge scheint durch 2 beschränkt zu sein. Mithilfe einer Induktion beweise diese Annahme

(IA) Es gilt ganz klar $x_1 = \sqrt{2} < 2$.

(IV) Für alle $k \in \mathbb{N}$, mit $k \leq n$ gilt, dass $x_k < 2$.

(IB) Dann gilt auch für $(n + 1) \in \mathbb{N} : x_{n+1} < 2$.

(IS) Führe den Schritt aus

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \Leftrightarrow x_{n+1}^2 = 2 + x_n \overset{\substack{\text{nach} \\ \textbf{(IV)}}}{<} 2 + 2 = 4$$

Hier greift wieder die Monotonie der Wurzel und so gilt

$$\sqrt{x_{n+1}^2} = x_{n+1} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

Somit ist die *Beschränktheit der Folge* gezeigt.

Die Folge ist Monoton und Beschränkt, also konvergent.
Schlussendlich bleibt noch der Grenzwert $x^\star \in \mathbb{R}$ offen. Klar ist das $x^\star \in [0, 2]$ liegen muss, da 0 und 2 Schranken[1] sind. Da der Limes existiert, ist ein Rechentrick anwendbar:

$$x^\star = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + x_n} = \sqrt{2 + x^\star}$$

$$\Rightarrow (x^\star)^2 = 2 + x^\star \iff (x^\star)^2 - x^\star - 2 = 0$$

$$x_{1,2}^\star = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \{-1, 2\}$$

Wobei $x^\star = -1$ nicht in Frage kommt, da $x^\star \geq 0$. Also ist $x^\star = 2$. □

[1] Natürlich ist auch 0 eine Schranke, da die Folge Monoton ist, und $x_1 = \sqrt{2} > 0$