Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung
ANALYSIS I (WS 12/13)
Serie 6

Abgabe bis 03.12.2012

Aufgabe 6.1: (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen die folgenden Aussagen für reele Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

b) Ist $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 6.2: (4 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

(ii) Jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

(iii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Aufgabe 6.3: (4 Punkte)

a) Berechnen Sie den Limes Superior und Limes Inferior der beiden reelen Folgen

$$a_n = \cos\left(\frac{n(n+1)}{2}\pi\right) \text{ und } b_n = \frac{2^{-n} + (-1)^n}{1 + 3^{-n}}.$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n = (a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n)^{\frac{1}{n}}$ mit gegebenen positiven reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$. ('Tipp: Sandwich-Lemma')

Aufgabe 6.4: (4 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichungen gelten, falls die jeweiligen rechten Seiten definiert sind:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$

Man nennt a) die Subadditivität des Limes Superior und b) die Superadditivität des Limes Inferior.