Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen,T. Streubel

# Lösungsalternativen für die Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Serie 6

---

**Aufgabe 6.1:** (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen die folgenden Aussagen für reele Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

b) Ist $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Lösungsalternative 6.1:

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, also gilt

$$\forall\epsilon > 0\, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\epsilon : |a_n - a| < \epsilon$$

Definiere $b_n = (a_n - a_{n+1})$ und zeige

$$\forall\epsilon > 0\, \exists \tilde{n}_\epsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq \tilde{n}_\epsilon : |b_n - 0| < \epsilon$$

Also suche zu jedem $\epsilon > 0$ ein passendes $\tilde{n}_\epsilon \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft (a). Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig, aber fix. Für alle $n \geq \tilde{n}_\epsilon := n_{\frac{\epsilon}{2}}$ gilt

$$|b_n - 0| = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| < |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

b) Die Folge $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Nullfolge, also

$$\forall\epsilon > 0\, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\epsilon : |(a_n - a_{n+1}) - 0| < \epsilon$$

Aber dann muss $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Folge sein:
Sei dazu $a_n = \sqrt{n}$, für $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $a_n = \sqrt{n}$ keine konvergente Folge. Jetzt suche ein $n_\epsilon$, so dass für alle $n \geq n_\epsilon$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \epsilon$$

Nun multipliziere beide Seiten mit $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ aus

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = n + 1 - n = 1 \leq \epsilon \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

Also suche $n_\epsilon$, sodass für alle $n \geq n_\epsilon$, gilt $\epsilon \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \geq 1$ dazu schätze weiter ab

$$\epsilon \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \geq \epsilon 2\sqrt{n} \geq 1 \iff n \geq (\frac{1}{2\epsilon})^2$$

Aus der letzen Zeile folgt, dass wir $n_\epsilon := (\frac{1}{2\epsilon})^2$ wählen dürfen.

**Aufgabe 6.2:** (4 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a$.

(ii) Jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a$.

(iii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Lösungsalternative 6.2:

**von (i) nach (ii)** Offensichtlich. Falls

$$\forall\epsilon\, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\epsilon : \, |a_n - a| < \epsilon$$

Eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich über eine monoton steigende, injektive (üblicherweise nicht unbedingt surjektive) Hilfsabbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt definieren $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\tilde{a}_n = a_{h(n)}$. Dann gilt für ein zu $n_\epsilon$ identisches $\tilde{n}_\epsilon = n_\epsilon$ die Konvergenzaussage immernoch

$$\forall\epsilon\, \exists\tilde{n}_\epsilon = n_\epsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq \tilde{n}_\epsilon : \, |\tilde{a}_n - a| = |a_{h(n)} - a| < \epsilon$$

**von (ii) nach (iii)** Ebenfalls offensichtlich. Bei der Definition von lim sup und lim inf muss es je eine Teilfolge $\overline{a}_n = a_{\overline{h}(n)}$, sowie $\underline{a}_n = a_{\underline{h}(n)}$ geben, mit entsprechenden monoton steigenden, injektiven Hilfsabbildungen $\overline{h} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\underline{h} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{h}(n)} = \limsup_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{\underline{h}(n)} = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Nach Vorraussetzung gilt jedoch für alle Teilfolgen und damit insbesondere für diese beiden, dass $\lim_{n\to\infty} a_{\overline{h}(n)} = a = \lim_{n\to\infty} a_{\underline{h}(n)}$ und dementsprechend folgt wie gefordert

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

**von (iii) nach (i)** Aufgrund der direkten Charakterisierung des Limes Superior und Limes Inferior, kann ein belibiges fixes $\epsilon > 0$ gewählt werden, sodass oberhalb von $\epsilon + \limsup_{n\to\infty} a_n = a + \epsilon$ und unterhalb von $-\epsilon + \liminf_{n\to\infty} a_n = a - \epsilon$ höchstens endlich viele Folgenglieder auftauchen. Also wählen wir

$$n_\epsilon = \max\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, a_n \leq -\epsilon + \liminf_{n\to\infty} a_n \text{ oder } a_n \geq \epsilon + \limsup_{n\to\infty} a_n \right\} + 1$$

Dann gilt folgende Aussage

$$\forall\epsilon > 0\, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\epsilon : \, (a_n \geq a - \epsilon \text{ und } a_n \leq a + \epsilon)$$

oder etwas anders ausgedrückt

$$\forall\epsilon > 0\, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\epsilon : \, |a_n - a| < \epsilon$$

Diese letzte Formulierung derselben Aussage ist gerade die Aussage über der Konvergenz und damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a$, wie behauptet. $\square$

**Aufgabe 6.3:** (4 Punkte)

a) Berechnen Sie den Limes Superior und Limes Inferior der beiden reellen Folgen

$$a_n = \cos\left(\frac{n(n+1)}{2}\pi\right) \text{ und } b_n = \frac{2^{-n} + (-1)^n}{1 + 3^{-n}}$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n = (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n)^{\frac{1}{n}}$ mit gegebenen positiven reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$. ('Tipp: Sandwich-Lemma')

Lösungsalternative 6.3:

a) **Zur ersten Folge** $a_n = \cos\left(\frac{n(n+1)}{2}\pi\right) = \cos(\hat{a}_n)$, für $\hat{a}_n = \frac{n(n+1)}{2}\pi$. Der Limes Superior und Limes Inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ müssen im Einheitsintervall $[-1,1]$ liegen. Da es gerade der Bildbereich vom Kosinus ist, dh. $\mathrm{im}(\cos) = [-1,1]$.

Nach einigen Testeinsätzen (für $n = 1,2,3,4$) ergibt sich

$$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = -1 \text{ und } a_4 = 1$$

*Vermutung:* Die Werte 1 und $-1$, werden nicht notwendigerweiser von allen, aber auf jeden Fall unendlich vielen $n \in \mathbb{N}$ getroffen. Damit ließen sich konstante Teilfolgen $1,1,1,\ldots$ und $-1,-1,-1,\ldots$ konstruieren und damit gelte $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

Um das zu zeigen betrachte folgende Gleichung und suche passende $n \in \mathbb{N}$, sodass $\exists\, T \in \mathbb{N}$ und

$$\underbrace{2\pi T}_{\text{Periode des Kosinus}} \overset{!}{=} \hat{a}_n = \frac{n(n+1)}{2}\pi \Leftrightarrow T = \frac{n^2+n}{4}$$

Offenbar erfüllen $n(k) := 4k$, für alle $k \in \mathbb{N}$ diese Gleichung. Zur Kontrolle

$$T = \frac{n^2(k) + n(k)}{4} = \frac{16}{4}k^2 + k = 4k^2 + k \in \mathbb{N} \quad \checkmark, \text{ sowie } 1 = \cos(0) = \cos(2\pi T)$$

Auf der anderen Seite suche ebenfalls passende $n \in \mathbb{N}$, sodass $\exists\, T \in \mathbb{N}$ und

$$2\pi T + \pi = \pi(2T+1) \overset{!}{=} \hat{a}_n = \frac{n(n+1)}{2}\pi \Leftrightarrow T = \frac{n^2+n-2}{4}$$

Offenbar erfüllen $n(k) := 4k + 2$, für alle $k \in \mathbb{N}$ diese Gleichung. Zur Kontrolle

$$T = \frac{n^2(k) + n(k) - 2}{4} = \frac{16k^2 + 4 + 16k + 4k + 2 - 2}{4} + k = 4k^2 + 1 + 5k \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

Sowie $-1 = \cos(\pi) = \cos(\pi + 2\pi T)$.

**Zur zweiten Folge** $b_n = \frac{2^{-n}+(-1)^n}{1+3^{-n}}$. Auf den ersten Blick ist nicht ersichtlich, ob sie konvergiert, divergiert, bestimmt oder unbestimmt. Der Wortlaut der Aufgabenstellung lässt vermuten, dass es mehrere Häufungspunkte gäbe. Das ist natürlich auch der Fall, aber um es zu erkennen muss ein wenig umgeformt werden

$$\frac{2^{-n}+(-1)^n}{1+3^{-n}} = \left(2^{-n}+(-1)^n\right)\frac{1}{1+3^{-n}} = \left((-1)^n + \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = (x_n+y_n)\frac{1}{1+z_n}$$

Wobei hier $x_n = (-1)^n$, $y_n = \frac{1}{2^n}$ und $z_n = \frac{1}{3^n}$ lediglich Hilfsfolgen sind. Nun ist die Situation klar, denn $y_n$ und $z_n$ sind mit der Majorantenfolge $\frac{1}{n}$ Nullfolgen. Hingegen ist $x_n$ nicht divergent, besitzt aber die konstanten Teilfolgen $1, 1, 1, \ldots$ und $-1, -1, -1, \ldots$ ähnlich wie oben. Also sei $h_I(n) = 2n$ und $h_{II}(n) = 2n-1$, dann **unter Zuhilfenahme der Grenzwertsätze** kann die Konvergenz von $b_{h_I(n)}$ und $b_{h_{II}(n)}$ gezeigt werden

$$b_{h_I(n)} = (x_{h_I(n)} + y_{h_I(n)})\frac{1}{1+z_{h_I(n)}} = \left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{3^{2n}}} = \left(1+\frac{1}{4^n}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{9^n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \tag{1}$$

$$b_{h_{II}(n)} = (x_{h_{II}(n)} + y_{h_{II}(n)})\frac{1}{1+z_{h_{II}(n)}} = \left(-1+\frac{1}{2^{2n-1}}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{3^{2n-1}}} \tag{2}$$

$$= \left(-1+\frac{2}{2^{2n}}\right)\frac{1}{1+\frac{3}{3^{2n}}} = \left(-1+2\frac{1}{4^n}\right)\frac{1}{1+3\frac{1}{9^n}} \xrightarrow{n\to\infty} -1 \tag{3}$$

Es gilt auch $b_n = \frac{2^{-n}+(-1)^n}{1+3^{-n}} \geq \frac{(-1)^n}{1+3^{-n}} \geq -1$. Also nach (2), (3) folgt:
Limes Inferior$((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = -1$.
Es gilt auch $b_n = \frac{2^{-n}+(-1)^n}{1+3^{-n}} \leq 1 + \frac{2^{-n}}{1+3^{-n}}$. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt dann ein $n_0$ so dass $\frac{2^{-n}}{1+3^{-n}} < \epsilon \ \forall n \geq n_0$. Also für $n \geq n_0$ gilt $b_n \leq 1+\epsilon$. Dass heisst, für $x^\star$ Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $x^\star \leq 1$. Aus (1) folgt dass $x_1^\star = 1$ Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Es gilt also:
Limes Superior$((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 1$.

b) Dazu sei im folgenden $\tilde{a} = \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} a_i$. Um das Sandwichlemma anwenden zu können, benötige eine Abschätzung oben und nach unten. Für die Abschätzung nach oben betrachte

$$x_n = (a_1^n + \cdots + a_k^n)^{\frac{1}{n}} \leq (\underbrace{\tilde{a}^n + \cdots + \tilde{a}^n}_{k\text{–mal}})^{\frac{1}{n}} = (k\tilde{a}^n)^{\frac{1}{n}} = k^{\frac{1}{n}}\tilde{a}$$

Für die Abschätzung nach unten betrachte

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\} : x_n = (a_1^n + \cdots + a_k^n)^{\frac{1}{n}} \geq (0 + \cdots + 0 + a_i^n + 0 + \cdots + 0)^{\frac{1}{n}} = a_i \tag{4}$$

Da nun der Ausdruck (4) für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ gilt, kann unter den $a_i$ das Maximum $\tilde{a}$ gewählt werden und so folgt

$$x_n \geq \tilde{a} = \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} a_i$$

Also gilt insgesammt

$$\underline{x}_n := \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} a_i \leq x_n \leq k^{\frac{1}{n}} \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} a_i =: \overline{x}_n$$

Die Folge $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konstant und damit trivialerweise konvergent gegen $\tilde{a} = \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} a_i$. Bleibt noch zu zeigen, dass $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen das Maximum konvergiert.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \lim_{n\to\infty} k^{\frac{1}{n}} \cdot \underline{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n\right) = 1 \cdot \tilde{a} = \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} a_i$$

Mit Sandwichlemma folgt demnach

$$\tilde{a} = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \tilde{a}$$

dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} a_i$$

Damit ist der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt. $\square$

**Aufgabe 6.4:** (4 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichungen gelten, falls die jeweiligen rechten Seiten definiert sind:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$

Man nennt a) die Subadditivität des Limes Superior und b) die Superadditivität des Limes Inferior.

Lösungsalternative 6.4:

**Zuvor zur Erinnerung** $\limsup_{n\to\infty} x_n = \min\{r\in\mathbb{R} \mid \forall\epsilon>0\, \exists n_0\in\mathbb{N}\,\forall n\geq n_0:\ x_n\leq r+\epsilon\}$. Entsprechendes gilt für den Limes Inferior, aber dieser muss **maximal** bezüglich seiner Eigenschaft sein.

a) Sei $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ und $\limsup_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

$$\forall\epsilon>0\,\exists n_{\epsilon,a}\in\mathbb{N}\,\forall n\geq n_{\epsilon,a}: a_n\leq a+\epsilon \tag{5}$$
$$\forall\epsilon>0\,\exists n_{\epsilon,b}\in\mathbb{N}\,\forall n\geq n_{\epsilon,b}: b_n\leq b+\epsilon \tag{6}$$

Angenommen $R:=\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) > a+b$. Dann wähle ich $n_0=\max(n_{\frac{R-(a+b)}{3},a}, n_{\frac{R-(a+b)}{3},b})$ und für $n\geq n_0$ gilt

$$a_n+b_n \;\leq\; a+b+2\frac{R-(a+b)}{3} = R-\frac{R-(a+b)}{3}.$$

Also gilt für Häufungspunkt $z^\star$ von $z_n := a_n+b_n$, dass $z^\star\leq R-\frac{R-(a+b)}{3} < R$. Das ist ein Widerspruch da $R=\limsup\limits_{n\to\infty}(z_n)$ das **Maximum** aller Häufungspunkte von $z_n$ ist.
Es gilt also $R=\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leq a+b$.

b) Sei $\liminf_{n\to\infty} a_n = a$ und $\liminf_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

$$\forall\epsilon>0\,\exists n_{\epsilon,a}\in\mathbb{N}\,\forall n\geq n_{\epsilon,a}: a_n\geq a-\epsilon \tag{7}$$
$$\forall\epsilon>0\,\exists n_{\epsilon,b}\in\mathbb{N}\,\forall n\geq n_{\epsilon,b}: b_n\geq b-\epsilon \tag{8}$$

Angenommen $R:=\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) < a+b$. Dann wähle ich $n_0=\max(n_{\frac{(a+b)-R}{3},a}, n_{\frac{(a+b)-R}{3},b})$ und für $n\geq n_0$ gilt

$$a_n+b_n \;\geq\; a+b-2\frac{(a+b)-R}{3} = R+\frac{(a+b)-R}{3}.$$

Also gilt für Häufungspunkt $z^\star$ von $z_n := a_n+b_n$, dass $z^\star\geq R+\frac{(a+b)-R}{3} > R$. Das ist ein Widerspruch da $R=\liminf\limits_{n\to\infty}(z_n)$ das **Minimum** aller Häufungspunkte von $z_n$ ist.
Es gilt also $R=\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\geq a+b$.