Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung
ANALYSIS I (WS 12/13)
Serie 7

Abgabe bis 10.12.2012

Aufgabe 7.1: (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $q \in [0,1)$, so dass $|a_{n+1} - a_n| < q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Aufgabe 7.2: (4 Punkte)

Ein Ball wird aus der Höhe H senkrecht zu Boden fallen gelassen. Der Ball springt vom Boden ab und erreicht bei jedem Absprung vom Boden, das r-fache der zuletzt erreichten Höhe, wobei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$. Berechnen Sie abhängig von r und H den vom Ball zurückgelegten Weg.

Aufgabe 7.3: (4 Punkte)

Prüfen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

konvergiert und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert. Allgemeiner untersuche man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ in der Form $\frac{a}{n(n+1)} - \frac{b}{(n+1)(n+2)}$ und verallgemeinern Sie dies für den zweiten Teil der Aufgabe.

Aufgabe 7.4: (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Sei $a \in \mathbb{R}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweisen Sie Ihre Antwort.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n - a)$ konvergiert

b) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

c) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

d) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent ist, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.