Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Übungsaufgaben zur Vorlesung ANALYSIS I (WS 12/13) Serie 8

Abgabe bis 17.12.2012

Aufgabe 8.1: (4 Punkte)

Eine Schnecke kriecht mit einer Geschwindigkeit von 10 cm pro Stunde auf einem einen Meter langen Gummiband entlang. Sie startet zum Zeitpunkt $t = 0$ am linken Ende. Nun wird das Gummiband am Ende jeder vollen Stunde homogen um einen Meter gedehnt. Geben Sie eine Folge an, die beschreibt, welchen Teil des Weges die Schnecke nach n Stunden zurückgelegt hat. Erreicht die Schnecke jemals das andere Ende des Bandes?

Aufgabe 8.2: (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$

Aufgabe 8.3: (4 Punkte)

Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen in $\mathbb{R}$ mit $a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ für alle $n \geq n_0$. Beweisen Sie: Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, so konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 8.4: (4 Punkte)

Sei a_n eine reelle Nullfolge. Die Folge A_n werde definiert durch

$$A_0 := \frac{1}{2} a_0$$
$$A_k := \frac{1}{2} a_{2k-2} + a_{2k-1} + \frac{1}{2} a_{2k}, \quad \forall k \geq 1$$

Zeigen Sie, dass wenn eine der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ oder } \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

konvergiert, so konvergiert auch die andere gegen denselben Grenzwert.