Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dr. A. Hoffkamp;
Dipl.Math. T.Bosse; Dipl.Math. L. Jansen

Lösungsvorschlag zur Serie 9

ANALYSIS I (WS 12/13)

Aufgabe 1:

Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei weiter $s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k b_k$ eine nach dem Leibnizkriterium konvergente Folge mit dem Grenzwert s.

a) Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|s_n - s| \leq b_{n+1}$.

Beweis:

Kürze die Monotonie mit (1) und die Positivität mit (2) ab. Zeige per Induktion, dass

$$0 \overset{(3)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} \overset{(4)}{\leq} b_{n+1}.$$

Zeige für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} \geq 0$.

IA: $m = 1, 2$:

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} = b_{n+2} \overset{(2)}{\geq} 0$$
$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} = b_{n+2} - b_{n+3} \overset{(1)}{\geq} 0$$

IS: $m-2, m-1 \to m$:

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} + b_{n+1+m}, & m \text{ ungerade} \\ \sum_{k=1}^{m-2}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} - b_{n+1+m} + b_{n+m}, & m \text{ gerade} \end{cases}$$
$$\overset{(1),(2),\mathrm{IV}}{\geq} 0$$

Zeige für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} \leq b_{n+1}$.

IA: $m = 1, 2$:

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} = b_{n+2} \overset{(1)}{\leq} b_{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1} b_{n+1+k} = b_{n+2} - b_{n+3} \overset{(2)}{\leq} b_{n+2} \overset{(1)}{\leq} b_{n+1}$$

IS: $m-2, m-1 \to m$:

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}b_{n+1+k} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-2}(-1)^{k+1}b_{n+1+k} + b_{n+1+m} - b_{n+m}, & m \text{ ungerade} \\ \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1}b_{n+1+k} - b_{n+1+m}, & m \text{ gerade} \end{cases}$$
$$\stackrel{(1),(2),\text{IV}}{\leq} b_{n+1}$$

Da nun gilt, dass für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}b_{n+1+k} \leq b_{n+1}$$

und da nach dem Leibnizkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_{n+1+k}$ konvergiert folgen (3) und (4) und man erhält:

$$|s_n - s| = |\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k b_k| = |b_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_{n+1+k}| \stackrel{(3),(4)}{\leq} b_{n+1}.$$

b) Hier ist $b_k = \frac{1}{k^2}$ und damit ist $b_5 = \frac{1}{25} < \frac{1}{20}$. Mit b_k haben wir wieder eine positive monoton fallende Nullfolge und somit konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium und nach *a*) erhalten wir eine Näherung des Grenzwertes mit der gewünschten Genauigkeit durch $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k \frac{1}{k^2}$.

Aufgabe 2:

Sei $c_n := \cos(\frac{n(n+1)}{2}\pi)$ und sei weiter $a_n := \frac{2+c_n}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Sei $w_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{|2+c_n|}$, dann gilt $\frac{1}{2} \leq w_n \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{3}$, wegen $-1 \leq c_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Sandwichlemma folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{2}$. Damit gilt

$$\liminf_{n\to\infty} w_n = \limsup_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{2}.$$

Sei nun $q_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}\frac{|2+c_{n+1}|}{|2+c_n|}$, dann gilt $\frac{1}{6} \leq q_n \leq \frac{3}{2}$, wegen $-1 \leq c_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass $\frac{1}{6}$ und $\frac{3}{2}$ Häufungspunkte sind und damit insbesondere jeweils der kleinste und größte Häufungspunkt sind. Bemerke, dass

$$c_{2^{n+1}} = 1, c_{2^{n+1}+1} = -1, c_{2^{n+1}-2} = -1, c_{2^{n+1}-1} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit finden wir mit

$$q_{2^n} = \frac{1}{2}\frac{|2+c_{2^n+1}|}{|2+c_{2^n}|} = \frac{1}{2}\frac{|2-1|}{|2+1|} = \frac{1}{6}$$

eine Teilfolge, die gegen $\frac{1}{6}$ konvergiert und mit

$$q_{2^n-2} = \frac{1}{2}\frac{|2+c_{2^n-1}|}{|2+c_{2^n-2}|} = \frac{1}{2}\frac{|2+1|}{|2-1|} = \frac{3}{2}$$

eine Teilfolge, die gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert. Die Folge q_n divergiert damit offenbar und es gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{6} \text{ und } \limsup_{n\to\infty} w_n = \frac{3}{2}.$$

b) Sei

$$a_n = \begin{cases} n! & \text{für } n \text{ ungerade} \\ (n-1)! & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Da $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n-1)!}$ unbeschränkt ist, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty.$$

Weiter wissen wir offensichtlich, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 0$ und da wir mit den ungeraden Folgengliedern des Quotienten eine Teilfolge finden, die gegen Null konvergiert ist der Limes Inferior Null:

$$\left|\frac{a_{(2n-1)+1}}{a_{2n-1}}\right| = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Außerdem finden wir mit den geraden Folgengliedern des Quotienten eine Teilfolge, die gegen Unendlich konvergiert und damit ist der Limes Superior auch Unendlich:

$$\left|\frac{a_{(2n)+1}}{a_{2n}}\right| = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{k} a_n$ natürlich nicht, da die Koeffizientefolge ja keine Nullfoge ist - das *Wurzel*-Kriterium liefert dann ebenfalls die erwartete Aussage.

Aufgabe 3:

a) Wir wollen die Tatsache ausnutzen, daß die alternierende harmonische Reihe nicht absolut konvergent ist und sie so umordnen, daß gerade gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = s \text{ und nach der Umordnung } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \ldots = \frac{s}{2}$$

Wir geben eine allgemeine Form der obigen Umordnung an und bekommen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n{}^* &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}s
\end{aligned}$$

b) Bemerke, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k} = -\infty$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$$

gilt. Damit ist es möglich solange ungerade Folgenglieder zu addieren, so dass die Summe echt größer als 2013 wird. Danach können wir nun solange gerade Folgenglieder subtrahieren, bis die Gesamtsumme wieder echt kleiner als 2013 wird. Nun fahren wir alternierend fort, so dass die Reihe um 2013 "pendelt", was letztlich dazu führt, daß fast alle Partialsummenglieder in einem ε-Streifen um 2013 liegen, die Partialsummenfolge also gegen 2013 konvergiert.

Aufgabe 4:

Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und sei $M := \{f | f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$. Sei $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und sei

$$f_A(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \notin A \\ 1, & \text{falls } n \in A \end{cases},$$

definiere mit dieser Zuordnung die Funktion

$$\begin{aligned} I : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\to M \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$

Die Funktion I ist offensichtlich eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und M und da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist, ist auch M überabzählbar.

Aufgabe 5:

Wir wollen Annas Geschicklchkeit Geschenke auszupacken einmal näher untersuchen. Wir wissen, daß sie bei jedem Auspacken immer schneller wird, so daß sie nur noch jeweils ein Drittel der Zeit t_n des vorangegangenen Geschenks benötigt, also

$$t_{n+1} = \frac{1}{3} t_n \Rightarrow t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot t_0,$$

wobei t_0 die Zeit ist, die Anna für das erste Geschenk braucht. Innerhalb einer Stunde ist Sie mit abzählbar unendlich vielen Geschenken fertig, also gilt mit Hilfe des Wissen über die geometrische Reihe, dass

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot t_0 = t_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = t_0 \cdot \frac{3}{2}.$$

Anna braucht also für das erste Geschenk genau 2/3 Stunden, also 40 Minuten. Bravo Anna!