Analysis I

Prof. Dr. Andreas Griewank

Wintersemester 2012/2013

Dieses Skript wurde von Alexander Prang
in Anlehnung an die Vorlesung erstellt.

Es enthält lediglich die Definitionen,
Sätze, Lemmata, Korollare und ausgewählte
Beispiele und Bemerkungen aus den
Vorlesungen, jedoch nicht die Beweise.

Für die Richtigkeit des gesamten
Inhaltes gibt es keine Garantie.

Inhaltsverzeichnis

1 Der reelle Körper

1.1 Reelle Zahlen

1.1.1 Zahlbereiche

Hierarchie: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; k-1; k; k+1; \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; \ldots; k; -k; \ldots\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z};\ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\};\ \text{p, q teilerfremd} \right\}$
- $\mathbb{R} = \{m_1; m_2; \ldots; m_j\}$
- $\mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2;\ i = \sqrt{-1} \right\}$

Das Arbeitsgebiet der Analysis ist $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n-Tupel von reellen Zahlen).

Die Erweiterung der Analysis auf $\mathbb{C}$ heißt Funktionentheorie.

1.1.2 Körperaxiome

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bilden jeweils einen Körper $\mathbb{K}$, in dem eine Addition und Multiplikation definiert sind, bzgl. derer die Axiome einer kommutativen Gruppe gelten.

- $(\mathbb{K}, +)$ ist eine echt *additive kommutative Gruppe* bzgl. $+, -$ mit neutralem Element 0.
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine echt *multiplikative kommutative Gruppe* bzgl. $\cdot, \div$ mit neutralem Element 1.

Es gelten alle üblichen Rechenregeln, insbesondere der Distributivität.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z = z \cdot (x + y)$$

1.1.3 Anordnungsaxiome

Im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ lassen sich die Elemente und jeder Teilkörper von $\mathbb{R}$ linear auf der Zahlengeraden anordnen, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (*Transitivität*)
- $x \leq x$ (*Reflexivität*)
- $x \leq y \vee y \leq x$ (*vollständige Anordnung*)
- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (*Monotonie*)

1.2 Summe, Produkte und Induktion

1.2.1 Definition: n-Tupel

Für ein n-*Tupel* $(a_k)_{k=1}^n = (a_1; \ldots; a_n) \in \mathbb{K}^n$ von n Elementen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n \text{ mit } \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

1.2.2 Lemma: Verallgemeinerte Distributivität

Für alle Zahlen b eines Körpers $\mathbb{K}$ und alle n-Tupel $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{K}^n$ gilt die *verallgemeinerte Distributivität.*

$$b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} b a_k$$

1.2.3 Lemma: Gauß'sche Summenformel

Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die *Gauß'sche Summenformel*:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.2.4 Lemma: Geometrische Summe bzw. Reihe

Für alle reellen Zahlen $a, q \in \mathbb{R}$ und für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt für die *geometrische Summe*:

$$\sum_{k=0}^{n-1} aq^k = \begin{cases} a\frac{q^n-1}{q-1}, & \text{falls } q \neq 1 \\ an, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

1.2.5 Definition: Fakultät und Binomialkoeffizient

(i) Die *Fakultät* einer Zahl n ist wie folgt definiert.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n$$

Da das leere Produkt stets 1 ist, gilt außerdem $0! = 1$ und $1! = 1$.

(ii) Der *Binomialkoeffizient* ist für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ wie folgt definiert.

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{\prod_{j=1}^{k}(n-k+j) \cdot \prod_{j=1}^{n-k} j}{\prod_{j=1}^{k} j \cdot \prod_{j=1}^{n-k} j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Weiterhin ist $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ und $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Abbildung 1: Binomialkoeffizienten im pascalschen Dreieck

1.2.6 Lemma: Additionseigenschaft von Binomialkoeffizienten

Für alle natürlichen Zahlen $1 \leq k \leq n$ gilt die *Additionseigenschaft von Binomialkoeffizienten*:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ und } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Insbesondere sind alle Binomialkoeffizienten ganzzahlig.

1.2.7 Satz: Binomischer Lehrsatz

Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ und für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt der *binomische Lehrsatz*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

1.2.8 Satz: Bernoullische Ungleichung

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $-1 \leq x \in \mathbb{R}$ gilt die *Bernoullische Ungleichung*:

(i) $n \geq -1$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (untere Schranke)

(ii) $n < 1$: $(1+x)^n \leq 1 + nx\frac{(1-nx)^n}{1-nx}$ (obere Schranke)

1.3 Absolutbetrag, Minimum und Maximum

1.3.1 Definition: Absolutbetrag

Der *Absolutbetrag* einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert als:

$$\text{abs}(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Es gilt immer $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$.

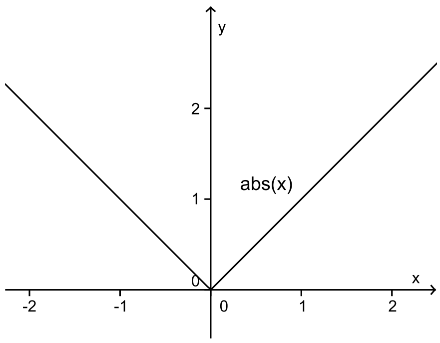

Abbildung 2: Betragsfunktion

1.3.2 Lemma: Elementare Eigenschaften

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*Definitheit*)

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (*Homogenität*)

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)

(iv) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (*Inverse Dreiecksungleichung*)

1.3.3 Definition: Maximum und Minimum

Das *Maximum* und das *Minimum* ist für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ definiert als:

$$\max(x,y) = \frac{x + y + |x-y|}{2} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq y \\ y, & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

$$\min(x,y) = \frac{x + y - |x-y|}{2} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y, & \text{falls } x \geq y \end{cases}$$

1.3.4 Lemma: Eindeutigkeit des Maximum und Minimum

Für beliebige n-Tupel $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\} \subset \mathbb{R}$ ist ihr Maximum und Minimum eindeutig, d. h. unabhängig von ihrer Reihenfolge definiert durch:

$$\max\,\{a_k\}_{k=1}^n = \max_{1 \leq k \leq n}(a_k) = \max\left(\max_{1 \leq k < n}(a_k),\ a_n\right) \text{ mit } \max(a_1) = a_1$$

1.3.5 Lemma: Maximum und Minimum als algebraische Verknüpfung

Das Maximum $\max(x,y)$ und das Minimum $\min(x,y)$ können auch als algebraische Verknüpfung angesehen werden und erfüllen:

(i) $\max(x,y) = \max(y,x)$ und $\min(x,y) = \min(y,x)$ (*Kommutativität*)

(ii) $\max(x, \max(y,z)) = \max(\max(x,y), z)$ (*Assoziativität*)

(iii) $\max(x, \min(y,z)) = \max(\max(x,y), \max(x,z))$ (*Distributivität*)

1.4 Vollständigkeit der reellen Zahlen, Supremum und Infimum

1.4.1 Definition: Supremum und Infimum

Man betrachte die Menge M im angeordneten Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

(i) Dann heißt das Element $t \in \mathbb{K}$ eine *obere Schranke* von M, falls $t \geq x$ für alle $x \in M$ ist.

(ii) Dann heißt das Element $s \in \mathbb{K}$ eine *untere Schranke* von M, falls $s \leq x$ für alle $x \in M$ ist.

(iii) Falls ein solches $t \in \mathbb{K}$ existiert, heißt M *nach oben beschränkt* mit $M \leq t < \infty$.

(iv) Falls ein solches $s \in \mathbb{K}$ existiert, heißt M *nach unten beschränkt* mit $-\infty < s \leq M$.

(v) Falls eine obere Schranke $t \geq M$ existiert, sodass für alle anderen oberen Schranken $t' \geq M$ gilt, dass $t' \geq t$ ist, dann heißt $t \in \mathbb{K}$ das *Supremum (kleinste obere Schranke)* von M mit $t = \sup M$.

(vi) Falls eine untere Schranke $s \leq M$ existiert, sodass für alle anderen unteren Schranken $s' \leq M$ gilt, dass $s' \leq s$ ist, dann heißt $s \in \mathbb{K}$ das *Infimum (größte untere Schranke)* von M mit $s = \inf M$.

Beispiel Für eine endliche Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ mit $|M| = n$ gilt:

$$\inf M = \min M = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \max M = \sup M$$

Beispiel Die Menge $M = \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ist nach oben unbeschränkt und nach unten beschränkt.

$$\sup M = \infty \text{ und } \inf M = \min M = 1$$

1.4.2 Definition: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind die kleinste Erweiterung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, sodass jede nach oben beschränkte Menge M ein Supremum in $\mathbb{R}$ besitzt, d. h. $M \subset \mathbb{R} \wedge M \leq t < \infty \Rightarrow \sup M \in \mathbb{R}$.

Das Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt die Menge der irrationalen Zahlen.

1.4.3 Satz: Existenz, Eindeutigkeit und Monotonie der Wurzelfunktion

Für alle $0 < c \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $0 < x \in \mathbb{R}$, sodass $x^n = c$ gilt. Diese reelle Zahl wird mit $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet und wächst streng monoton bezüglich c, d. h.

$$c < c' \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{c'} = x'$$

1.4.4 Lemma: Potenzgesetze

Für $0 < c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist die gebrochene Potenz $c^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{c})^m$ eindeutig und erfüllt die üblichen Rechenregeln für alle $p, q \in \mathbb{Q}$:

(i) $c^{p+q} = c^p \cdot c^q$

(ii) $(c^p)^q = c^{p \cdot q} = (c^q)^p$

1.4.5 Definition: Bisektionsverfahren

Das *Bisektionsverfahren* oder auch *Intervallhalbierungsverfahren* genannt, erzeugt eine konvergente Folge von Intervallschachtelungen. Dieses Verfahren ermöglicht es, Nullstellen numerisch zu berechnen, indem das Intervall, in dem sie auftreten können, immer weiter eingegrenzt wird, bis es kleiner als die geforderte Rechengenauigkeit ist.

1.4.6 Satz: Intervallschreibweise

Für $a, b \in \mathbb{R}$ kürzt man die Mengenschreibweisen als Intervallschreibweisen ab:

- $[a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$ (*abgeschlossenes Intervall*)
- $(a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$ (*offenes Intervall*)
- $[a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$ (*halboffenes Intervall*)
- $(a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$ (*halboffenes Intervall*)

Mit $-\infty < a$ und $b < \infty$ ergeben sich die Schreibweisen:

- $(-\infty, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq b\}$ (*abgeschlossenes Intervall*)
- $(-\infty, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}$ (*offenes Intervall*)
- $[a, \infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x\}$ (*abgeschlossenes Intervall*)
- $(a, \infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\}$ (*offenes Intervall*)
- $(-\infty, \infty) \equiv \mathbb{R}$

1.4.7 Satz: Intervallschachtelungsprinzip

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen lässt sich äquivalenterweise zur Definition des Supremums dadurch charakterisieren, dass jede absteigende Folge von Intervallen

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_{k-1}, b_{k-1}] \supset [a_k, b_k]$$

einen nicht leeren Durchschnitt besitzt:

$$\emptyset \neq M = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{x \in \mathbb{R} \colon a_k \leq x \leq b_k;\ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

2 Folgen und Reihen

2.1 Funktionen und Folgen

2.1.1 Definition: Funktion, Abbildung

Gegeben seien zwei Mengen X und Y, die als Definitions- und Wertebereich bezeichnet werden.

(i) Eine eindeutige Zuordnung von Werten $y \in Y$ zu Argumenten $x \in X$ heißt *Funktion* oder *Abbildung* f von X nach Y. Man schreibt dann $f\colon X \to Y$ und $\forall x \in X\colon f(x) = y$.

(ii) Eine Funktion oder Abbildung f heißt *injektiv*, wenn $\forall x_1, x_2 \in X\colon f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ gilt.

(iii) Eine Funktion oder Abbildung f heißt *surjektiv*, wenn $\forall y \in Y\ \exists x \in X\colon f(x) = y$ gilt.

(iv) Eine Funktion oder Abbildung f heißt *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bemerkung

(i) Eine Funktion oder Abbildung f ist injektiv, wenn jedes Element der Zielmenge höchstens einmal als Funktionswert angenommen wird. Es werden also keine zwei verschiedenen Elemente der Definitionsmenge auf ein und dasselbe Element der Zielmenge abgebildet. Eine injektive Funktion wird auch als Injektion bezeichnet.

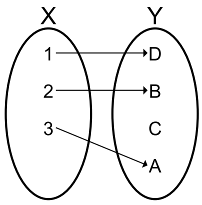

Abbildung 3: Injektivität

(ii) Eine Funktion oder Abbildung f ist surjektiv, wenn jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert angenommen wird, also mindestens ein Urbild hat. Sie ist bezüglich ihrer Bildmenge immer surjektiv. Eine surjektive Funktion wird auch als Surjektion bezeichnet.

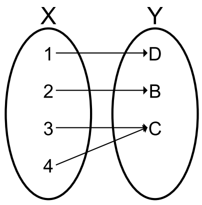

Abbildung 4: Surjektivität

(iii) Eine Funktion oder Abbildung f ist bijektiv, wenn jedes Element der Zielmenge genau einmal als Funktionswert angenommen wird, also genau ein Urbild hat. Eine bijektive Funktion wird auch als Bijektion bezeichnet.

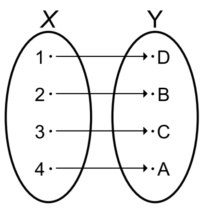

Abbildung 5: Bijektivität

2.1.2 Definition: Folge

Eine *Folge* in oder aus Y ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to Y$, wobei man f oft nicht explizit benennt, sondern die x indiziert $x_n = f(n)$. Die gesamte Folge bezeichnet man als

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n=1,\ldots} = (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n)$$

2.1.3 Definition: Folgenkonvergenz

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* mit dem *Grenzwert* $x_* \in \mathbb{R}$, falls Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n(\varepsilon)\colon |x_n - x_*| < \varepsilon$$

Eine nicht konvergente Folge heißt *divergent*.

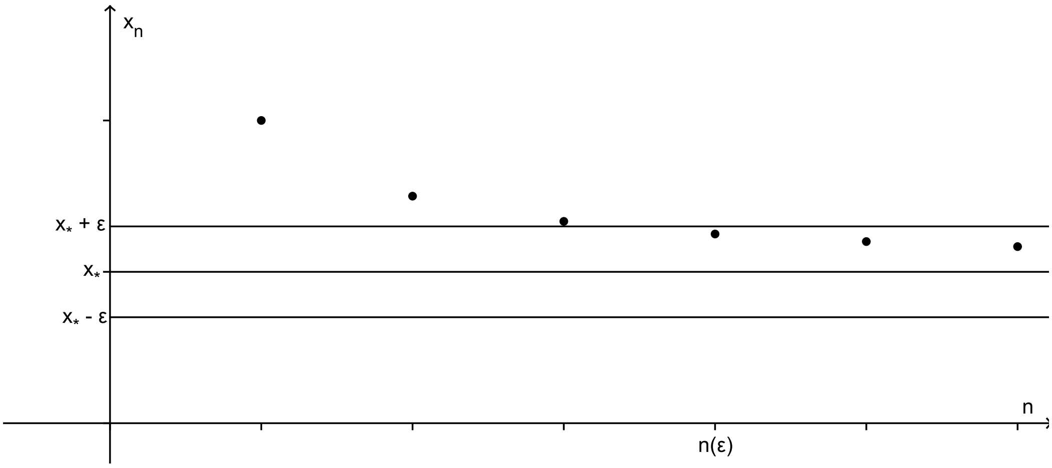

Abbildung 6: Folgenkonvergenz

Bemerkung Die Definition sagt aus, dass es für alle $\varepsilon > 0$ einen Index n_ε gibt, sodass ab diesem Index alle Folgenglieder innerhalb der Epsilon-Umgebung $[x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon]$ und nur endlich viele Glieder außerhalb dieser liegen.

Beispiel Die Folge $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ erfüllt die Konvergenzbedingung für $n(\varepsilon) > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n(\varepsilon)\colon \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

2.1.4 Lemma: Grenzwert und Beschränktheit

(i) Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert, der mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$ oder $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_*$ bezeichnet wird.

(ii) Jede konvergente Folge ist nach oben und nach unten beschränkt.

2.1.5 Definition: Monotonie

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

(i) *monoton steigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x_n \leq x_{n+1}$ ist.

(ii) *monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x_n \geq x_{n+1}$ ist.

(iii) *streng monoton steigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x_n < x_{n+1}$ ist.

(iv) *streng monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x_n > x_{n+1}$ ist.

2.1.6 Satz: Monotoniekriterium

Jede nach oben beschränkte steigende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. nach unten beschränkte fallende Folge konvergiert und zwar gegen $x_* = \sup\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $x_* = \inf\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$.

2.1.7 Lemma: Grenzwertsätze

Die Folgenkonvergenz von $x_n \to x_*$ und $y_n \to y_*$ impliziert folgende Grenzwertsätze.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_* \pm y_*$ (*Additivität*)

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_* \cdot y_*$ (*Homogenität*)

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{x_*}{y_*}$ (falls $y_n, y_* \neq 0$)

2.1.8 Lemma: Elementare Grenzwerte

(i) $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ für $a > 0$

(ii) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

2.1.9 Korollar: Grenzwert von Polynomen in mehreren Variablen

Für beliebige Polynome P und Q in mehreren Variablen gilt:

$$\frac{P(A_1(x_n), A_2(x_n), \ldots, A_k(x_n))}{Q(A_1'(x_n), A_2'(x_n), \ldots, A_k'(x_n))} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{P(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_k^*)}{Q(A_1'^*, A_2'^*, \ldots, A_k'^*)}$$

2.1.10 Korollar: Grenzwert rationaler Wurzelfunktionen

Für beliebige Polynome $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ gilt:

$$\sqrt[n]{\frac{P(n)}{Q(n)}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

2.1.11 Lemma: Monotonie und Sandvich-Eigenschaft

Gegeben seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \leq y_n \leq z_n$, sowie $x_n \to x_*$, $y_n \to y_*$ und $z_n \to z_*$, dann gilt:

(i) $x_* \leq z_*$ (*Monotonieeigenschaft*)

(ii) $x_* = z_* \Rightarrow y_n \to y_* = x_* = z_*$ (*Sandvich-Eigenschaft*)

Beispiel $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

2.1.12 Lemma: Folgencharakterisierung von inf und sup

Für $M \subseteq \mathbb{R}$ ist $s \leq M$ eine *untere Schranke* bzw. $t \geq M$ eine *obere Schranke* genau dann, wenn s bzw. t der Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, also $x_n \to s$ bzw. $x_n \to t$ mit $x_n \in M$ gilt.

$$t = \sup(M) \Leftrightarrow t \geq x\ \forall x \in M \wedge \exists (x_n) \subseteq M : \lim_{n\to\infty} x_n = t$$
$$s = \inf(M) \Leftrightarrow s \leq x\ \forall x \in M \wedge \exists (x_n) \subseteq M : \lim_{n\to\infty} x_n = s$$

2.1.13 Lemma: Umordnung

Das Konvergenzverhalten einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d. h. die Existenz eines Grenzwertes und sein Wert, bleibt unverändert, wenn man

(i) endlich viele Glieder modifiziert, weglässt oder hinzufügt;

(ii) die Reihenfolge verändert, d. h. die Folge $\tilde{x}_n = x_{h(n)}$ mit der Bijektion $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ betrachtet, sodass $x_n \to x_* \Rightarrow \tilde{x}_n \to x_*$ gilt.

2.1.14 Definition: Nullfolgen und uneigentlicher Grenzwert

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Nullfolge*, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ist.

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ist.

(iii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ist.

Bemerkung Bei bestimmter Divergenz spricht man auch von *uneigentlicher Konvergenz.*

2.1.15 Lemma: Grenzwert des Kehrwertes bestimmt divergenter Folgen

Der Kehrwert bestimmt divergenter Folgen ist eine Nullfolge.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$$

Bemerkung Die meisten Aussagen über Grenzwertsätze lassen sich auf uneigentlich konvergente Fälle verallgemeinern.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty = \lim_{n\to\infty} y_n \text{ und } \lim_{n\to\infty} z_n = c \in \mathbb{R}$$

Bestimmte Ausdrücke

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \infty$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + z_n) = \infty$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot z_n) = \operatorname{sgn}(c) \cdot \infty$ falls $c \neq 0$

Unbestimmte Ausdrücke

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot z_n)$ falls $c = 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n)$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$

2.2 Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß und Cauchy

2.2.1 Definition: Teilfolge

Eine Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine streng monoton wachsende Indexfunktion $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, sodass $\tilde{x}_n = x_{h(n)}$ gilt.

Bemerkung Häufig wird h nicht explizit angegeben, sondern implizit durch Auswahlkriterien definiert.

2.2.2 Definition: Häufungspunkt

Ein Punkt $x_* \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $\tilde{x}_n = x_{h(n)}$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} x_{h(n)} = x_*$$

Beispiel Die Folge $x_n = (-1)^n$ hat zwei Häufungspunkte, nämlich $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$.

2.2.3 Lemma: Elementare Teilfolgeneigenschaften

(i) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist auch konvergent und zwar zu demselben Grenzwert.

(ii) Jede beschränkte Folge hat entweder eine monoton steigende oder eine monoton fallende Teilfolge.

2.2.4 Satz: Bolzano-Weierstraß

(i) Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge und damit mindestens einen Häufungspunkt.

(ii) Eine Folge ist konvergent genau dann, wenn sie nur einen Häufungspunkt besitzt.

2.2.5 Lemma: Direkte Charakterisierung von Häufungspunkten

Ein Punkt $x_* \in \mathbb{R}$ ist

(i) Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n\colon |x_m - x_*| < \varepsilon$.

(ii) kein Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n\colon |x_m - x_*| \geq \varepsilon$.

2.2.6 Korollar: Beschränktheit

Ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $s \leq x_n \leq t$ beschränkt, so gilt dies auch für jeden seiner Häufungspunkte x_*, sodass $s \leq x_* \leq t$ gilt.

2.2.7 Definition: Limes superior und Limes inferior

Das Infimum und Supremum der Menge H aller Häufungspunkte einer beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Limes superior* bzw. *Limes inferior*. Man schreibt:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup(H) = \max(H)$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf(H) = \min(H)$$

Beispiel Die Folge $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ hat den $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$ und den $\liminf_{n\to\infty} = -1$.

2.2.8 Lemma: Direkte Charakterisierung von lim inf und lim sup

(i) $x_* = \limsup_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall m \geq n(\varepsilon)\colon x_m < x_* + \varepsilon$ und x_* ist minimal bzgl. dieser Eigenschaft

(ii) $x_* = \liminf_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall m \geq n(\varepsilon)\colon x_m < x_* - \varepsilon$ und x_* ist minimal bzgl. dieser Eigenschaft

2.2.9 Lemma: Rechenregeln für lim inf und lim sup

(i) $x_n \leq y_n \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n \wedge \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n$

(ii) $c > 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} cx_n = c \limsup_{n\to\infty} x_n$ (*Positive Homogenität*)

(iii) $c < 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} cx_n = -c \limsup_{n\to\infty} -x_n = c \liminf_{n\to\infty} x_n$

(iv) $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$ (*Subadditivität*)
$\limsup_{n\to\infty}(x_n - y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n - \liminf_{n\to\infty} y_n$

(v) $\liminf_{n\to\infty} x_n \geq 0 \wedge \liminf_{n\to\infty} y_n \geq 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$

(vi) $\liminf_{n\to\infty} y_n > 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \leq \frac{\limsup_{n\to\infty} x_n}{\liminf_{n\to\infty} y_n}$

2.2.10 Definition: Cauchy-Folgen und Cauchy-Kriterium

Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine *Cauchy-Folge* ist, das heißt die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n(\varepsilon)\colon |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Bemerkung Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n(\varepsilon)$ gibt, sodass der Abstand zweier beliebiger Folgenglieder ab diesem Index kleiner als ε ist.

2.3 Unendliche Reihen

2.3.1 Definition: Reihe

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die n-te Partialsumme ist definiert als $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Reihe mit den Gliedern a_n. Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, so wird ihr Grenzwert s bezeichnet mit

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

2.3.2 Lemma: Grenzwert der geometrischen Reihe

Gegeben sei die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit den Gliedern $a_k = c \cdot q^k$. Der *Grenzwert der geometrischen Reihe* ist wie folgt definiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot q^k = c \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{c}{1-q} & \text{, falls } |q| < 1 \\ \operatorname{sgn}(c) \cdot \infty & \text{, falls } q \geq 1 \\ \text{konvergiert nicht} & \text{, falls } q \leq -1 \end{cases}$$

2.3.3 Satz: Cauchy-Kriterium für Reihen

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \colon \left| \sum_{k=m}^{m'} a_k \right| < \varepsilon \text{ falls } n(\varepsilon) \leq m \leq m'$$

2.3.4 Satz: Notwendige Bedingung für Konvergenz

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ist, dass die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ mit } \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

2.3.5 Definition: Alternierende Reihe

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *alternierend*, wenn für $k \in \mathbb{N} : a_k a_{k+1} < 0$ gilt.

2.3.6 Satz: Leibniz-Konvergenzkriterium

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Bemerkung Über den Grenzwert der Reihe macht das Kriterium jedoch keine Aussage. Das Kriterium gilt auch für monoton wachsende Nullfolgen.

2.3.7 Definition: Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe der Absolutbeträge $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

2.3.8 Satz: Verhältnis absoluter und normaler Konvergenz

Die absolute Konvergenz impliziert die normale Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2.3.9 Satz: Majorantenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Summanden $b_k \geq 0$. Gilt $k \in \mathbb{N}_0 : |a_k| \leq b_k$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Man nennt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine *Majorante* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2.3.10 Satz: Minorantenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe mit nichtnegativen Summanden $b_k \geq 0$. Gilt $k \in \mathbb{N}_0 : a_k \geq b_k$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. Man nennt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine *Minorante* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2.3.11 Satz: Quotientenkriterium

Gegeben sei eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit reellen Summanden $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Die Reihe ist absolut konvergent, wenn

- es eine reelle Zahl $0 < \theta < 1$ gibt, sodass $\forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ gilt oder
- $q = \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ gilt.

Die Reihe ist divergent, wenn

- $\forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ gilt oder
- $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ gilt.

2.3.12 Satz: Wurzelkriterium

Gegeben sei eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit reellen Summanden $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Die Reihe ist absolut konvergent, wenn

- es eine reelle Zahl $0 < \theta < 1$ gibt, sodass $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$ gilt oder
- $r = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ gilt.

Die Reihe ist divergent, wenn

- $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ gilt oder
- $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ gilt.

2.3.13 Lemma: Verallgemeinerte harmonische Reihe

Für beliebige Exponenten $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } c \leq 1 \\ s \in (0, \infty), & \text{falls } c > 1 \end{cases}$$

Beispiel Für $c = 1$ und für $c = 2$ ergeben sich folgende Reihen mit ihren Grenzwerten.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$$

2.3.14 Definition: Umordnung absolut konvergenter Reihen

Für eine Bijektion $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ mit $\tilde{a}_n = a_{h(n)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.3.15 Satz: Konvergenz umgeordneter Reihen

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann tut das auch jede Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ mit $\tilde{a}_n = a_{h(n)}$ und zwar gegen denselben Grenzwert.

2.3.16 Satz: Umordnungssatz von Riemann

Falls einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, dann gibt es für jeden Zielwert $a \in [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup -\infty \cup \infty$ eine Umordnung $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{h(n)} = a$$

gilt. Es gibt auch Umordnungen für die $\sum_{n=1}^{\infty} a_{h(n)}$ weder eigentlich noch uneigentlich konvergiert, d. h. wirklich divergiert.

2.4 b-adische Zahlendarstellung und Überabzählbarkeit von R

2.4.1 Definition: b-adische Zahlendarstellung

Die *b-adische Darstellung* einer reellen Zahl $x \geq 0$ zur natürlichen Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ mit den Ziffern $z_k \in (0, 1, \ldots, b-1)$ bzw. den entsprechenden Symbolen, ist die Reihe

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} z_k b^{-k} = (z_{-m}, z_{-m+1} \ldots, z_{-1}, z_0, z_1, \ldots)_b$$

Das heißt z_k ist die k-te Ziffer hinter dem Punkt in der Darstellung von x.

Beispiel Die b-adische Darstellung der Zahl 35, 41 zur Basis 10 ist $x = 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}$.

2.4.2 Satz: Existenz der Darstellung

Jede nicht negative reelle Zahl $x \geq 0$ hat für jede Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ genau eine Darstellung durch die Ziffernfolge $(z_k)_{k \geq -m}$ mit $z_k \in (0, 1, \ldots, b-1)$ und $m \in \mathbb{Z}$, sowie der Einschränkung, dass unendlich viele $z_k \neq b - 1$ vorkommen müssen.

2.4.3 Satz: Konvergenz der Darstellung

Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $b_m, \ldots, b_0 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, sowie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ und man schreibt

$$b_m b_{m-1} \ldots b_0, a_1 a_2 a_3 \ldots := b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + b_1 10^1 + b_0 10^0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \ldots$$

2.4.4 Satz: Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Die Menge der (positiven) reellen Zahlen ist *überabzählbar*, d. h. es gibt keine Durchnummerieungsfunktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sodass f surjektiv ist, d. h. jede Nummerierung verpasst ein $y > 0$.

2.5 Potenzreihen

2.5.1 Definition: Potenzreihe

Eine *Potenzreihe* (am Punkt x_0) ist eine Reihe der Form $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, wobei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ die *Koeffizientenfolge* und $x_0 \in \mathbb{R}$ den *Entwicklungspunkt* bezeichnet.

Potenzreihen am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ haben die Form $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

2.5.2 Satz: Konvergenzradius

Für jede Koeffizientenfolge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gibt es (unabhängig vom Entwicklungspunkt x_0) einen *Konvergenzradius* $\varrho \in [0, \infty] = \{\varrho \geq 0 : \varrho \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$, sodass die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ für alle $x \in (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) \equiv \{x_0 - \varrho < x < x_0 + \varrho\}$ absolut konvergiert und für $x \in (-\infty, x_0 - \varrho) \cup (x_0 + \varrho, \infty)$ divergiert. Der Konvergenzradius ϱ lässt sich explizit berechnen als

$$\varrho = \begin{cases} \infty, & \text{falls } r = 0 \\ 1/r, & \text{falls } 0 < r < \infty \\ 0, & \text{falls } r = \infty \end{cases}$$

Dazu ist es notwendig den Parameter r mit Hilfe des Wurzel- oder Quotientenkriteriums zu berechnen.

- $\varrho = \frac{1}{r}$ mit $r = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (*Formel von Cauchy-Hadamard*)
- $\varrho = \frac{1}{q}$ mit $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (*Euler-Kriterium*)

Beispiel Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$.

Beispiel Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert nach dem Euler-Kriterium für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Bemerkung Zwei Potenzreihen $P(x)$ und $Q(x)$ mit demselben Entwicklungspunkt x_0 lassen sich einander addieren und miteinander multiplizieren.

2.5.3 Definition: Exponentialreihe

Eine Potenzreihe der Form $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ heißt *Exponentialreihe*, wobei $P(x)$ die *Exponentialfunktion* kennzeichnet.

2.5.4 Lemma: Konvergenz der Linearkombination

Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und den Potenzreihen $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $Q(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit den Konvergenzradien $\varrho_P > 0$ und $\varrho_Q > 0$ konvergiert die *Linearkombination*

$$R(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(x - x_0)^n$$

absolut mit einem Konvergenzradius $\varrho_R \geq \frac{1}{2}\min(\varrho_P, \varrho_Q) > 0$.

2.5.5 Satz: Restgliedabschätzung

Für eine Potenzreihe $P(x)$ mit Konvergenzradius $\varrho > 0$ existiert zu jedem $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$ und $n \geq 1$ eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\forall x \in [-\tilde{\varrho}, \tilde{\varrho}] \subset (-\varrho, \varrho) : \left| P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| \leq c \cdot |x|^n$$

2.5.6 Korollar: Potenzreihen am Ursprung

Falls eine Potenzreihe $P(x)$ an der Stelle $P(0) = a_0 \neq 0$ einen positiven Konvergenzradius $\varrho > 0$ hat, dann existiert ein $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$, sodass $P(x) \neq 0\ \forall x \in (-\tilde{\varrho}, \tilde{\varrho})$.

2.5.7 Satz: Identitätssatz von Potenzreihen

Betrachte zwei Potenzreihen $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $Q(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit den Konvergenzradien $\varrho_P > 0$ und $\varrho_Q > 0$. Falls es eine konvergente Folge $x_n \to x_*$ mit $x_n \neq x_*$ und $P(x_n) = Q(x_n)$ gibt, dann gilt $a_n = b_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

2.5.8 Definition: Cauchy-Produkt

Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei unendliche Reihen, dann bezeichnet die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

2.5.9 Satz: Konvergenz des Cauchy-Produktes

Falls die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren, dann gilt dies auch für ihr Cauchy-Produkt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Beispiel Das Cauchy-Produkt der Exponentialreihen $\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ und $\exp y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \exp(x+y) \\
&= \exp x \cdot \exp y
\end{aligned}$$

3 Stetigkeit

3.1 Grundlagen und Zwischenwertsatz

3.1.1 Definition: Epsilon-Delta-Kriterium

Eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* an der Stelle $x_0 \in D$, falls Folgendes gilt.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Falls die Funktion f an allen Stellen $x_0 \in D$ stetig ist, so heißt f stetig auf D. Wenn D ein offenes Intervall ist, dann heißt f stetig in D.

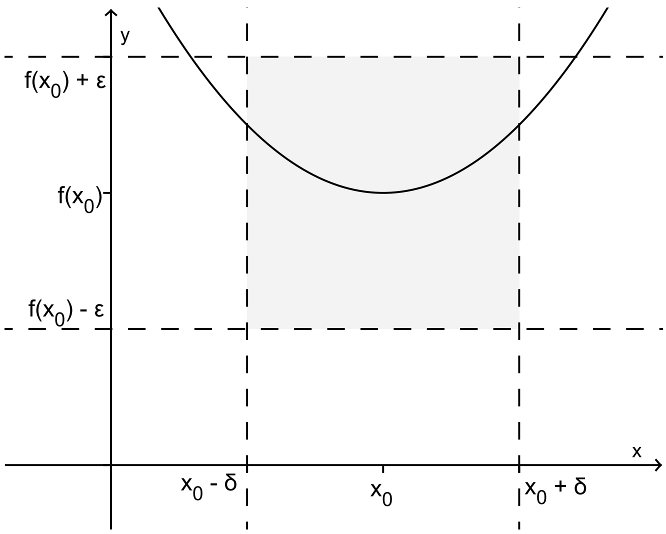

Abbildung 7: Epsilon-Delta-Kriterium

Beispiele

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ ist stetig an allen $x_0 \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ ist stetig an allen $x_0 \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig an allen $x_0 \in \mathbb{R}_0^+ \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
- Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ -1 & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$ ist an $x_0 = 0$ unstetig.
- Dirichlet-Funktion $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, aber nirgends stetig.

3.1.2 Lemma: Vererbungsregeln

Falls die Funktionen $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ stetig sind, so gilt dies auch für

(i) $h(x_0) = f(x_0) \pm g(x_0)$

(ii) $h(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0)$

(iii) $h(x_0) = f(x_0)/g(x_0)$ (vorausgesetzt, dass $g(x_0) \neq 0$ ist)

3.1.3 Korollar: Stetigkeit von Polynomen

Alle Polynome $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

Alle rationalen Funktionen $f(x)/g(x)$ sind stetig an allen $x_0 \in D$, wenn $g(x_0) \neq 0$ ist.

3.1.4 Satz: Nullstellensatz

Falls die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ überall stetig ist und $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ ist, dann existiert mindestens eine Nullstelle $x_* \in [a,b]$ mit $f(x_*) = 0$.

3.1.5 Korollar: Zwischenwertsatz

Falls die Funktion f auf $[a,b]$ stetig ist, dann wird jeder Wert $y \in [\min(f(a),\ f(b)),\ \max(f(a),\ f(b))]$ an einer Stelle $x \in [a,b]$ angenommen, d. h. $f(x) = y$.

3.1.6 Lemma: Stetigkeit der Komposition von Funktionen

Falls $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ an der Stelle $x_0 \in D$ bzw. $y_0 = g(x_0) \in E$ stetig ist, dann ist die Komposition $h = g \circ f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls an der Stelle x_0 stetig.

Verallgemeinerung des Stetigkeitsbegriffes auf Funktionen mehrerer Variablen

Die Funktion $f(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt stetig, falls obige Definition gilt mit $|x - x_0|$ ersetzt durch

$$\|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Die Vererbungseigenschaften sind weiterhin gegeben.

3.1.7 Satz: Folgenstetigkeit

Eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ aus $x_n \to x_0$ folgt, dass $f(x_n) \to f(x_0)$. Man nennt f deshalb auch *folgenstetig*.

3.1.8 Definition: Abgeschlossenheit und kompakte Menge

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt

(i) *abgeschlossen*, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit $x_n \to x_* \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $x_* \in M$ ist und

(ii) *kompakt*, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiele

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ist abgeschlossen und zudem kompakt, falls $a, b \in \mathbb{R}$.
- $(a,b]$, $[a,b)$ und (a,b) sind nicht abgeschlossen, es sei denn $a = -\infty$ und $b = \infty$.
- $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber nicht kompakt, dasselbe gilt für $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$.

3.1.9 Satz: Weierstraß

Falls eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf kompaktem D stetig ist, dann existiert ein *Minimalpunkt* $x_* \in D$ und ein *Maximalpunkt* $x^* \in D$, sodass für alle $x \in D$ gilt, dass $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ ist.

3.1.10 Definition: Links- und rechtsseitige Stetigkeit

Eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in D$ den

(i) linksseitigen Grenzwert a, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\colon x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt.
Man schreibt: $a = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0^-)$.

Falls $x_0 \in D$ ist und $f(x_0) = a \in \mathbb{R}$ gilt, dann heißt f an der Stelle x_0 *linksseitig stetig.*

(ii) rechtsseitigen Grenzwert b, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\colon x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt.
Man schreibt: $b = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0^+)$.

Falls $x_0 \in D$ ist und $f(x_0) = b \in \mathbb{R}$ gilt, dann heißt f an der Stelle x_0 *rechtsseitig stetig.*

(iii) Falls (i) und (ii) mit $a = b$ gilt, dann heißt a der Grenzwert von f an der Stelle x_0.
Man schreibt: $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

3.1.11 Lemma: Äquivalenz zur Folgendefinition

(i) Der Ausdruck $a = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ ist äquivalent zur Darstellung der Funktion mit einer Folge, die gegen x_0 läuft, sodass $a = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, wobei $x_n \to x_0$ mit $x_n < x_0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Der Ausdruck $b = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ ist äquivalent zur Darstellung der Funktion als Menge $\{x_n \searrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)\}$.

(ii) f ist stetig an $x_0 \in D$ genau dann, wenn f sowohl links- als auch rechtsseitig stetig an x_0 ist.

Beispiele

- Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ -1 & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$ ist an $x_0 = 0$ weder links- noch rechtsseitig stetig.

$$\lim_{x\nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(0) \text{ und } \lim_{x\searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(0)$$

- Heaviside-Funktion $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x < 0 \\ 1 & \text{, falls } x \geq 0 \end{cases}$ ist an $x_0 = 0$ ist lediglich rechtsseitig stetig.

$$\lim_{x\nearrow 0} \Theta(x) = 0 \neq 1 = \Theta(0) \text{ und } \lim_{x\searrow 0} \Theta(x) = 1 = \Theta(x)$$

3.2 Gleichmäßige Stetigkeit und Heine-Borel

3.2.1 Definition: Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

(i) *gleichmäßig stetig* auf D, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x_0 \in D\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt, wobei dasselbe δ für alle $x_0 \in D$ gilt.

(ii) *Lipschitz-stetig* auf D, wenn es ein $L > 0$ gibt, sodass $\forall x_0, x \in D\colon |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|$ gilt. Das heißt die Konstante L beschränkt die Steigung im Funktionsgraphen.

(iii) *lokal Lipschitz-stetig* auf D, wenn $\forall x_0 \in D\ \exists \delta(x_0), L(x_0)$, sodass f auf $D \wedge (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Lipschitz-stetig mit konstantem $L(x_0)$ ist.

Beispiele

- $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf (a, b) lokal Lipschitz-stetig, aber nicht global Lipschitz-stetig.
- $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig, aber nicht lokal Lipschitz-stetig, da für $x_0 = 0$ und $x \in (0, 1]$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to 0} \infty$$

3.2.2 Lemma: Implikationen der Stetigkeit

Für eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten folgende Implikationen.

- Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit und lokale Lipschitz-Stetigkeit.
- Gleichmäßige Stetigkeit und lokale Lipschitz-Stetigkeit implizieren Stetigkeit.
- Stetigkeit auf kompakter Menge impliziert gleichmäßige Stetigkeit.

3.2.3 Satz: Heine-Borel

Falls eine Funktion f auf eine kompakte Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig ist, so ist sie sogar gleichmäßig stetig.

4 Differentiation

4.1 Definition und Grundeigenschaften von Ableitungen

4.1.1 Definition: Differenzenquotient und Differenzierbarkeit

Gegeben ist eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(i) Für ein festes $x_0 \in (a,b)$ ist der *Differenzenquotient* (Sekantensteigung) von f an der Stelle x_0

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ bzw. } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ mit } h = \Delta x \text{ bzw. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(ii) Falls der Differenzenquotient an der Stelle x_0 stetig ist, nennt man die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar mit dem *Differentialquotienten* (Tangentensteigung) bzw. der *Ableitung*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right|_{x=x_0}$$

(iii) Falls die Ableitungsfunktion $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in (a,b)$ existiert und somit selbst eine Funktion von (a,b) nach $\mathbb{R}$ ist, heißt f auf (a,b) *differenzierbar*. Falls f' auf (a,b) stetig ist, heißt f auf (a,b) *stetig differenzierbar*.

Bemerkung Alle Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und zwar beliebig oft.

4.1.2 Lemma: Implikationen der Differenzierbarkeit

Für eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ gelten folgende Implikationen.

(i) Ist f differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a,b)$, so ist f stetig an x_0.

(ii) Ist f stetig differenzierbar auf (a,b), so ist f lokal Lipschitz-stetig auf (a,b).

4.1.3 Definition: Links- und rechtsseitige Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt *linksseitig differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in (a,b)$, falls der linksseitige Grenzwert der Ableitungsfunktion existiert.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt *rechtsseitig differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in (a,b)$, falls der rechtsseitige Grenzwert der Ableitungsfunktion existiert.

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

4.1.4 Lemma: Folgerungen aus der links- und rechtsseitigen Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar, wenn f an x_0 sowohl links- als auch rechtsseitig differenzierbar ist und $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ gilt.

4.1.5 Satz: Differentiationsregeln

Seien die Funktionen $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar, dann gilt dies auch für die Komposition $h = f \circ g$ mit $\circ = +, -, \cdot, \div$ und die Ableitungswerte $h'(x_0)$ sind gegeben durch:

(i) $h'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) \pm g(x))\right|_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ (*Additivität*)

(ii) $h'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) \cdot g(x))\right|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$ (*Produktregel*)

$h'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c \cdot f(x))\right|_{x=x_0} = c \cdot f'(x_0)$ (*Homogenität*)

(iii) $h'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ falls $g(x_0) \neq 0$ (*Quotientenregel*)

4.1.6 Lemma: Ableitung von Potenzfunktionen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

4.1.7 Satz: Kettenregel

Sei eine Funktion f auf dem Intervall (a,b) stetig und an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar und eine Funktion g auf der Umgebung $(y_0-\delta, y_0+\delta)$ mit $y_0 = f(x_0)$ definiert, sowie auf y_0 differenzierbar, dann ist $g \circ f = h$ auf der Umgebung $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ definiert und an der Stelle x_0 differenzierbar. Der Wert der Ableitung ist

$$h'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0) \text{ bzw. } h'(x_0) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

4.2 Optimalitätsbedingungen und Mittelwertsatz

4.2.1 Definition: Lokale und globale Minima und Maxima

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimmt an einer Stelle $x_0 \in D$ ein *lokales Minimum* an, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $x \in D\colon |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ gilt.

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimmt an einer Stelle $x_0 \in D$ ein *lokales Maximum* an, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $x \in D\colon |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ gilt.

Gilt die Ungleichung für beliebige $\delta > 0$, so heißt x_0 das *globale Minimum bzw. Maximum* auf D.

Bemerkung Sowohl lokale wie globale Extrema können im Inneren wie an Randpunkten eines Intervalls auftreten.

4.2.2 Lemma: Notwendige Optimalitätsbedingungen

Falls eine Funktion f in (a,b) differenzierbar und a,b links- bzw. rechtsseitig differenzierbar ist, gilt für jedes lokale Minimum x_0 von f auf $[a,b]$:

(i) $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$ (*innerer Punkt*)

(ii) $a = x_0$ und $f'_+(x_0) \geq 0$ (*linker Rand*)

(iii) $b = x_0$ und $f'_-(x_0) \leq 0$ (*rechter Rand*)

Entsprechend gilt für jedes lokale Maximum x_0:

(i) $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$ (*innerer Punkt*)

(ii) $a = x_0$ und $f'_+(x_0) \leq 0$ (*linker Rand*)

(iii) $b = x_0$ und $f'_-(x_0) \geq 0$ (*rechter Rand*)

Bemerkung Streng genommen besteht ein Minimum bzw. Maximum aus einem Paar $(x_0, f(x_0))$ reeller Zahlen, wobei x_0 die Minimal- bzw. Maximalstelle und $f(x_0)$ den Minimal- bzw. Maximalwert bezeichnet.

4.2.3 Satz: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Falls f auf $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar ist, existiert ein $x \in (a,b)$, sodass gilt.

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Die Sekantensteigung zwischen a und b wird an einem $x \in (a,b)$ als Tangentensteigung angenommen.

Konsequenz Das Supremum des Ableitungsbetrages ist die Lipschitz-Konstante der Ausgangsfunktion.

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \frac{|f'(z)(y-x)|}{|y-x|} = |f'(z)| \leq \sup_{a\leq z\leq b}|f'(z)|$$

4.2.4 Korollar: Charakterisierung von Monotonie durch Ableitung

Sei die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gilt für $a \leq x < y \leq b$.

(i) $f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow f'(z) \geq 0 \; \forall z \in (a, b)$

(ii) $f(x) < f(y) \Rightarrow f'(z) > 0 \; \forall z \in (a, b)$

Die Nichtnegativität der Ableitung ist notwendig und hinreichend für monotones Wachstum. Die Positivität der Ableitung ist hinreichend für streng monotones Wachstum.

4.2.5 Satz: Existenz von Umkehrfunktionen

Falls die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und streng monoton steigend ist, dann existiert eine stetige *Umkehrfunktion* $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, sodass

- $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in [a, b]$
- $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in [f(a), f(b)]$

Bemerkung Allgemein werden nicht streng monotone Funktionen auf einen Teil ihres Definitionsbereiches eingeschränkt in dem sie diese Eigenschaft haben und somit umkehrbar sind.

4.2.6 Korollar: Umkehrregel

Falls die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig ist und auf dem Intervall (a, b) differenzierbar mit der positiven Ableitung f' ist, so existiert eine *differenzierbare Umkehrfunktion* $f^{-1}\colon (f(a), f(b)) \to (a, b)$ und die Werte ihrer Ableitung sind gegeben durch:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) \bigg|_{y=y_0} = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

Bemerkung Die Ableitung der Umkehrfunktion ist der Kehrwert der Ableitung der Ausgangsfunktion.

4.2.7 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Sind die Funktionen f und g auf dem Intervall $[a, b]$ stetig sind und auf dem Intervall (a, b) differenzierbar sind mit $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in [a, b]$, dann existiert mindestens ein x, sodass gilt.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.2.8 Satz: Regel von de l'Hospital

Seien die Funktionen f und g auf dem Intervall (a, b) differenzierbar und $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Wann immer der rechte Grenzwert existiert, sind f und g an der Stelle x_0 stetig differenzierbar mit $g'(x_0) \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung Manchmal hat $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ an der Stelle x_0 nur einen links- und/oder rechtsseitigen Grenzwert. Dann lässt sich l'Hospital immer noch anwendbar verallgemeinern.

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ bzw. } \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dabei darf x_0 auch ∞ sein. Außerdem gilt die Aussage auch, wenn $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \nearrow x_0} g(x)$ bzw. $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \searrow x_0} g(x)$. Mit anderen Worten, sowohl die unbestimmten Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ wie auch $\frac{\infty}{\infty}$ lassen sich gegebenfalls mit l'Hospital berechnen. Unbestimmte Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$ lassen sich häufig als $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ oder $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ wieder mit l'Hospital berechnen.

4.3 Höhere Ableitungen und Taylorentwicklung

4.3.1 Definition: Höhere Ableitung

Eine Funktion f heißt k-mal differenzierbar auf dem Intervall (a,b), wenn beginnend mit $f^{(0)}(x) = f(x)$ alle Ableitungen $f^{(j)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(j-1)}(x)$ für alle $j = 1, \ldots, k$ wohldefiniert sind, d. h. die j-te Ableitung ist für $j = 0, \ldots, k-1$ wiederum differenzierbar. Wenn $f^{(k)}$ auch noch stetig auf (a,b) ist, schreibt man $f \in C^k(a,b)$, d. h. f ist *k-mal stetig differenzierbar auf* (a,b).

Spezialfälle

(i) $f \in C^0(a,b)$ bedeutet, dass f stetig ist.

(ii) $f \in C^\infty(a,b) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(a,b)$ bedeutet, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

4.3.2 Lemma: Höhere Ableitungsregeln

Seien die Funktionen $f, g \in C^k(a,b)$, dann gilt:

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : h(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \Rightarrow h^{(k)}(x) = \alpha \cdot f^{(k)}(x) + \beta \cdot g^{(k)}(x)$ (*Linearität*)

(ii) $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot f^{(j)}(x) \cdot g^{(k-j)}(x)$ (*Leibnizregel*)

4.3.3 Definition: Taylorpolynom

Für eine Funktion $f \in C^k(a,b)$ und einen *Entwicklungspunkt* $x_0 \in (a,b)$ heißt

$$P_k(x_0, x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

Taylorpolynom des Grades k von f an der Stelle x_0.

4.3.4 Satz: Taylor

Für eine Funktion $f \in C^k(a,b)$ und einen Entwicklungspunkt $x_0 \in (a,b)$ gilt

$$f(x) = P_k(x_0, x) + R_k(x_0, x) \text{ mit } R_k(x_0, x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \text{ und } |\xi - x_0| < |x - x_0|$$

Interpretation Der Fehler $f(x) - P_k(x_0, x)$ entspricht genau dem nächsten Term $P_{k+1}(x_0, x) - P_k(x_0, x)$ ausgewertet an der Zwischenstelle $\xi \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$.

4.3.5 Lemma: Optimalitätsbedingungen höherer Ableitungen

Falls eine Funktion $f \in C^{2k+1}(a,b)$ kann $x_* \in (a,b)$ nur ein lokales Minimum sein, wenn die erste nicht verschwindende Ableitung nicht ungerader Ordnung ist.

$$f^{(j)}(x_*) = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, (2k-1) \text{ und } f^{(2k)}(x_*) > 0$$

4.3.6 Definition: Taylorreihe

Für eine Funktion $f \in C^\infty(a,b)$ und einen Entwicklungspunkt $x_0 \in (a,b)$ heißt

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

die *Taylorreihe* von f an der Stelle x_0.

Bemerkung Die Taylorreihe konvergiert meistens, aber nicht immer gegen $f(x)$ für $x \approx x_0$.

Bemerkung Die Taylorreihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$ konvergiert absolut auf $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, wobei $\varrho = \frac{1}{r}$ mit $r = \limsup\limits_{j\to\infty} \sqrt[j]{\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}}$, wobei $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ zugelassen ist.

4.3.7 Definition: Reell analytische Funktion

Eine Funktion $f \in C^\infty(a,b)$, die an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ für alle $x \in (x_0-\varrho, x_0+\varrho)$ mit einer Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ wertemäßig übereinstimmen, heißen *reell analytisch*.

Bemerkung Im Komplexen, d. h. für $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, impliziert einmalige *komplexe Differenzierbarkeit* die Existenz beliebig hoher Ableitungen und die Identität mit der Potenzreihe (Taylorreihe).

4.3.8 Satz: Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Jede gegebene Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$ beliebig oft differenzierbar und identisch mit ihrer Taylorreihe. Spezifisch gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right] = \sum_{j=k}^{\infty} a_j \frac{j!}{(j-k)!}(x-x_0)^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k}\frac{(j+k)!}{j!}(x-x_0)^j$$

sodass an der Stelle $x = x_0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right]\Bigg|_{x=x_0} = a_k \cdot \frac{k!}{0!} \Leftrightarrow a_k = \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right]\Bigg|_{x=x_0}$$

4.3.9 Lemma: Konvergenzradius abgeleiteter Potenzreihen

Die abgeleiteten Potenzreihen haben genau denselben Konvergenzradius ϱ wie die ursprüngliche Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, wobei $\varrho = \frac{1}{r}$ mit

$$\begin{aligned} r &= \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j| \cdot \frac{j!}{(j-k)!}} \\ &= \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|}\left[\sqrt[j]{j} \cdot \sqrt[j]{j-1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[j]{j-k+1}\right] \\ &= \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} = r \end{aligned}$$

für die Potenzreihe selbst.

$$P^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k! \Leftrightarrow a_k = \frac{1}{k!} \cdot P^{(k)}(x_0)$$

4.4 Spezielle Funktionen

Nach dem Satz über das Cauchy-Produkt erfüllt $\exp x$ die sogenannte *Funktionalgleichung*

$$\exp(x_1+x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2 \Leftrightarrow e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$$

$$\Rightarrow \exp(-x) = \frac{\exp 0}{\exp x} = \frac{1}{\exp x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Aus der Reihendarstellung folgt unmittelbar $\exp x > 0$ für $x > 0$ und somit auch $\exp(-x) > 0$ für $x > 0$, sodass $\exp x > 0$ für alle x ist.

Mithilfe der komplexen Arithmetik oder durch direkte Anwendung des Cauchy-Produktes ergeben sich die *Additionstheoreme*.

$$\begin{aligned} \sin(x_1+x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1 \\ \cos(x_1+x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 \end{aligned}$$

Die entsprechenden Umkehrfunktionen sind der *Arkussinus* und *Arkuskosinus*.

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ (streng monoton steigend)}$$
$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \text{ (streng monoton fallend)}$$

Die Ableitungen der Umkehrfunktionen sehen wie folgt aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$$

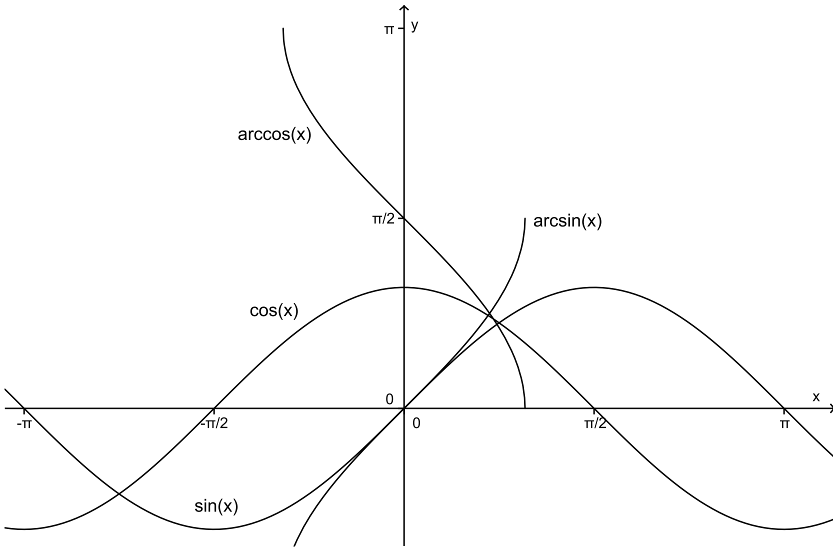

Abbildung 8: Sinus, Kosinus und ihre Umkehrfunktionen

Weitere spezielle Funktionen sind der *Sinus Hyperbolicus* und *Kosinus Hyperbolicus*.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \text{ und } \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Die Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ sind also der ungerade bzw. gerade Anteil der Funktion $\exp x$.

Für den Sinus Hyperbolicus gilt außerdem $\sinh x = -\sinh x$ (Punktsymmetrie zum Ursprung) und für den Kosinus Hyperbolicus gilt $\cosh x = \cosh(-x)$ (Achsensymmetrie zur Ordinate).

4.4.1 Lemma: Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Das Exponential $\exp x\colon (-\infty,\infty) \to (0,\infty)$ hat eine eindeutige Umkehrfunktion, die mit $\log x$ bzw. $\ln x$ bezeichnet wird und der *natürliche Logarithmus* (*Logarithmus naturalis*) heißt. Sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \equiv \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$$

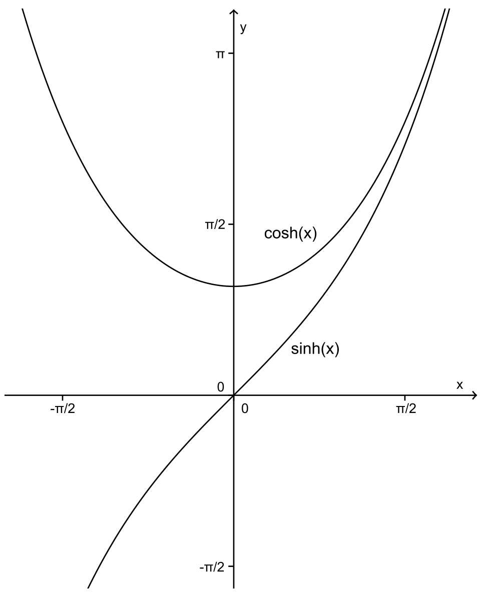

Abbildung 9: sinh(x) und cosh(x)

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist nach dem Satz über die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log x = \left.\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp y}\right|_{y=\log x} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}$$

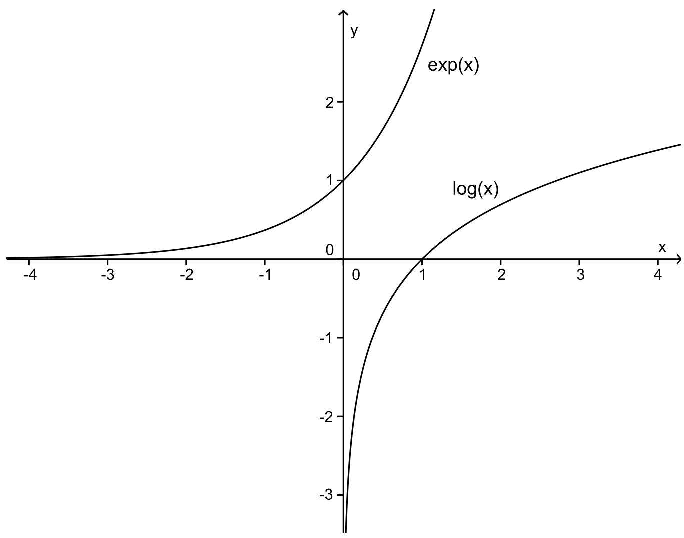

Abbildung 10: Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

4.4.2 Definition: Allgemeine Exponentiale und Logarithmen

Für eine beliebige positive Basis $a > 0$ gilt

$$a^x \equiv \exp(x \log a) \Rightarrow e^x \equiv \exp(x \log e)$$
$$\log_a x \equiv \frac{\log x}{\log a} \Rightarrow \log x = \log_e x \text{ mit } e = \exp 1$$

Bemerkung Für die Taylorentwicklung vom natürlichen Logarithmus am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ benötigt man die k-te Ableitung der Funktion.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log x = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \log x = (k-1)! \frac{(-1)^{k-1}}{x^k}$$

Damit gilt Folgendes für die Taylorreihe durch Einsetzen der k-ten Ableitung.

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1^k \cdot k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

Dementsprechend gilt für den $\log(1+x)$ die äquivalente Darstellung.

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Der Konvergenzradius $\varrho = \dfrac{1}{r}$ mit $r = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}} = \limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1$ ist $\varrho = 1$.

Damit konvergiert $\log(1+x)$ absolut, wenn $|x| < 1$, also für $1 + x \in (0, 2)$.

Für $x = -1$ divergiert die Taylorreihe bestimmt gegen $\log 0 = -\infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(-1)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = -\infty$$

Für $x = 1$ konvergiert die Taylorreihe bedingt nach Leibniz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} 1^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \log 2$$

4.4.3 Lemma: Eigenschaften der Umkehrfunktion

Die Funktionen a^x und $\log_a x$ sind Umkehrfunktionen voneinander und erfüllen folgende Eigenschaften.

(i) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

(ii) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ a^x = \log a \cdot a^x$

(iv) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \log_a x = \dfrac{1}{x \log a}$

Bemerkung Von praktischer Bedeutung sind vor allem der *binäre Logarithmus* $\log_2 x$ und der *dekadische Logarithmus* $\log_{10} x$.